תרגיל 12

1. נניח $2^{\aleph_0}=\aleph_{18}$. הוכיחו כי: $(\aleph_2)^{\aleph_0}=(\aleph_1)^{\aleph_0}$.
פתרון:

$\aleph_1,\aleph_2>2$ ולכן $2^{\aleph_0}\le(\aleph_1)^{\aleph_0},(\aleph_2)^{\aleph_0}$. מצד שני, $\aleph_1,\aleph_2<\aleph_{18}$, ולכן $(\aleph_2)^{\aleph_0},(\aleph_1)^{\aleph_0}\le(\aleph_{18})^{\aleph_0}=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{(\aleph_0\times\aleph_0)}=2^{\aleph_0}$. כלומר, קיבלנו ש $(\aleph_2)^{\aleph_0}=(\aleph_1)^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$.

2. הוכיחו: $\aleph_1=(\aleph_1)^{\aleph_0}$ אמ"ם $\aleph_1=2^{\aleph_0}$.
פתרון:

$\Longleftarrow$: $2^{\aleph_0}>\aleph_0$, ולכן $2^{\aleph_0}\ge\aleph_1$. מצד שני, $2<\aleph_1$, ולכן $2^{\aleph_0}\le\aleph_1^{\aleph_0}=\aleph_1$. כלומר, $2^{\aleph_0}=\aleph_1$.

$\Longrightarrow$: אם $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, אז $\aleph_1=2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0\times\aleph_0}=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=(\aleph_1)^{\aleph_0}$.

3. תהי A קבוצה של מונים גבוליים חזקים. הוכיחו ש $\sup A$ הינו מונה גבולי חזק. (אין צורך להוכיח שהוא מונה)
פתרון:

יהי $\lambda<\sup A$. בפרט, קיים $\mu\in A$ כך ש$\lambda<\mu$. μ גבולי חזק, ולכן $2^{\lambda}<\mu\le\sup A$.

4. בהנחת השערת הרצף המוכללת, חשבו את החזקות הבאות:

(א) $\aleph_\omega^{\aleph_2}$

(ב) $\aleph_{\aleph_2}^{\aleph_1}$

(ג) $\aleph_4^{\aleph_\omega}$

פתרון:

i. $\mathrm{cf}(\aleph_\omega)=\omega$. $\omega<\aleph_2<\aleph_\omega$. לכן $\aleph_\omega^{\aleph_2}=(\aleph_\omega)^{\perp}=\aleph_{\omega+1}$.

ii. $\mathrm{cf}(\aleph_{\aleph_2})=\aleph_2$. $\aleph_1<\aleph_2$. לכן $\aleph_{\aleph_2}^{\aleph_1}=\aleph_{\aleph_2}$.

iii. $\aleph_4<\aleph_\omega$. לכן $\aleph_4^{\aleph_\omega}=(\aleph_\omega)^{\perp}=\aleph_{\omega+1}$.