המחלקה למתמטיקה
בדרך שלנו התוצאה שלך מוכחת!

אוניברסיטת בר־אילן
Bar-Ilan University

~קיץ של מספרים+

חוויה ייחודית בקיץ שבין כיתה ט' לכיתה י'

חוברת הכנה

א'

לפרטים על קורס הקיץ כנסו לקישור

המחלקה למתמטיקה | אוניברסיטת בר-אילן | רמת גן, מיקוד 5290002 | ישראל
Department of Mathematics | Bar-Ilan University | Ramat-Gan, 5290002 | Israel
www.math.biu.ac.il | Mathoffice@biu.ac.il

משוואות ריבועיות, פרבולות, שורש וערך מוחלט

חוברת הכנה א' לקראת "קיץ של מספרים"

קראו את חומרי הרקע וההסברים, וענו על השאלות.

פרבולות

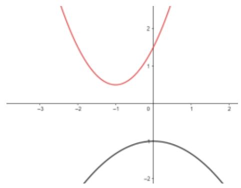
פרבולה היא פונקציה מהצורה $y = ax^2 + bx + c$ כאשר $a \neq 0$.

ידוע לנו שכאשר המקדם של x^2 חיובי $a > 0$ הפרבולה "מחייכת":

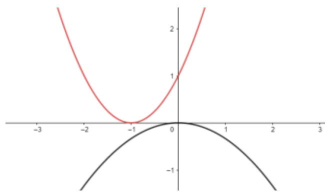
וכאשר $a < 0$ הפרבולה "בוכה":

בנוסף, לפרבולה יש שלושה יחסים אפשריים עם ציר הx:

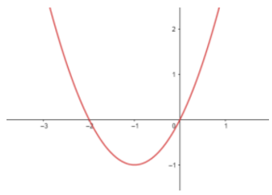
1. מרחפת, כמו שתי הפרבולות בציור:



2. נושקת לציר, כמו שתי הפרבולות בציור:



3. חותכת את הציר בשתי נקודות, כמו הפרבולה בציור:



אם כך, אנו מעוניינים למצוא את נקודות החיתוך של הפרבולה עם הציר.

נקודות חיתוך של פונקציה עם ציר הx נקראות **שורשים** של הפונקציה.

שאלה 1: קבעו עבור כל אחת מן הפרבולות הבאות אם היא "מחייכת" או "בוכה"

א. $y = x^2 + x - 10$

ב. $y = -x^2 + x - 10$

ג. $y = x - 2x^2 + 2$

ד. $y = (1 - x)^2 + 2$

ה. $y = 1 - (x - 2)^2$

ו. $y = (x - 1)(x - 2)$

ז. $y = (x - 1)(3 - x)$

ח. $y = -2(x - 1)(x - 5)$

<u>שורש וערך מוחלט</u>

שורש של מספר $a \geq 0$ הוא המספר <u>האי-שלילי</u> שבריבוע שווה ל-a. לדוגמא, $\sqrt{9} = 3$ אך $\sqrt{9} \neq -3$.

טעות נפוצה היא לחשוב כי $\sqrt{x^2} = x$, בהמשך נראה מדוע נוסחא זו אינה נכונה.

לפני כן, נציג את מושג הערך המוחלט: **ערך מוחלט** של מספר a , מסומן $|a|$, הוא המרחק בין a לבין ראשית הציר.

לדוגמא $|3| = |-3| = 3$ כפי שניתן לראות בציור הבא:

עבור מספרים אי שליליים $x \geq 0$ אכן מתקיים כי $\sqrt{x^2} = x$.

למשל, עבור $x = 3$ נקבל $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$

אבל (!) עבור מספרים שליליים $x < 0$ מתקיים כי $\sqrt{x^2} = |x|$

למשל עבור $x = -3$ נקבל $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3|$

כלומר, בסה"כ, לכל מספר x מתקיים כי:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

שאלה 2: קבעו לכל אחת מן הטענות הבאות אם היא נכונה או לא

א. אם $x < 0$ אזי $|x| > 0$

ב. אם $|x| = 0$ אזי $x = 0$

ג. לכל x מתקיים כי $\sqrt{x^2} > x$

ד. אם $x < 0$ אזי $\sqrt{x^2} > x$

ה. אם $x < 0$ אז $x + |x| = 0$

ו. אם $x \geq 0$ אז $x + |x| = 2x$

ז. אם $x^2 > 1$ אזי $|x| = x$

ח. לכל x מתקיים כי $\big||x| + x\big| = |x| + x$

ט. לכל x מתקיים כי $\sqrt{x^2} \geq x$

י. אם $x < 0$ אזי $\sqrt{x^2} = -x$

<u>משוואה ריבועית פשוטה</u>

על מנת למצוא את הפתרונות למשוואה $x^2 = 9$ נוציא שורש לשני הצדדים.

נקבל כי

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$$

זכרו כי $\sqrt{9} = 3$ **ולא נכון** לרשום כי $\sqrt{9} = \pm 3$. אז כיצד נכון להמשיך? באופן הבא:

$$|x| = 3$$

מה קרה כאן? השורש הוא תמיד מספר האי שלילי ולכן $\sqrt{9} = 3$. כמו כן, מאותה סיבה בדיוק, מתקיים כי $\sqrt{x^2} = |x|$.

לכן סה"כ נקבל כי הפתרונות למשוואה הם $x = \pm 3$.

באופן כללי, עבור $a > 0$ הפתרונות למשוואה $x^2 = a$ הם $x = \pm\sqrt{a}$.

נביט בדוגמא נוספת: נמצא את כל הפתרונות של המשוואה $(x+1)^2 = a^2$ כאשר a פרמטר שונה מאפס.

נוציא שורש לשני הצדדים ונקבל

$$|x+1| = |a|$$

ולכן

$$x + 1 = \pm a$$

ומכאן שני הפתרונות הם

$$x = -1 \pm a$$

שאלה 3: מצאו את כל הפתרונות לכל אחת מן המשוואות הבאות

א. $x^2 = 5^2$

ב. $x^2 - 16 = 0$

ג. $(x-1)^2 = 9$

ד. $(x+5)^2 = 49$

ה. $|x+5| = 7$

ו. $(2x+1)^2 = 9$

<u>פתרון משוואה ריבועית באמצעות השלמה לריבוע</u>

אנו מכירים את נוסחת הכפל המקוצר $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

כעת, אם נתקל בביטוי $x^2 + 2ax$ נגיד לעצמנו – כמה חבל שאין שם a^2 בסוף?

אבל אדם עושה לעצמו את המזל, נוסיף ונחסר את a^2 ונקבל:

$$x^2 + 2ax + a^2 - a^2 = (x+a)^2 - a^2$$

תהליך זה נקרא **השלמה לריבוע**, וזהו טריק שימושי במגוון בעיות מתמטיות.

לדוגמא, נרצה למצוא את השורשים של הפרבולה $y = x^2 + 2x - 8$ באמצעות השלמה לריבוע.

נזכיר – שורשי הפרבולה הם נקודות החיתוך עם ציר הx, כלומר אנחנו רוצים לפתור את המשוואה

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

נשלים את הביטוי $x^2 + 4x$ לריבוע:

$$x^2 + 4x + 4 - 4 - 12 = 0$$

$$(x+2)^2 = 16$$

$$x + 2 = \pm 4$$

$$x = -2 \pm 4$$

$$x_{1,2} = -6,2$$

שאלה 4: פתרו את המשוואות הריבועיות הבאות באמצעות השלמה לריבוע

א. $x^2 + 4x - 12 = 0$

ב. $x^2 - 6x + 5 = 0$

ג. $x^2 + 10x + 9 = 0$

ד. $x^2 + x - \frac{3}{4} = 0$

ה. $x^2 + 2ax - 3a^2 = 0$, כאשר a פרמטר

ו. $x^2 + 2x - (a^2 + 4a + 3) = 0$ כאשר a פרמטר

<u>מציאת שורשי פרבולה כללית באמצעות השלמה לריבוע</u>

כעת נראה כיצד ניתן לשחזר את נוסחת השורשים לפרבולה באמצעות השלמה לריבוע.

נתונה לנו הפרבולה $y = ax^2 + bx + c$ כאשר $a \neq 0$.

שורשי הפרבולה הם פתרונות המשוואה הריבועית

$$ax^2 + bx + c = 0$$

נחלק בa

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

כיוון שישנם הרבה פרמטרים נעשה את ההשלמה לריבוע בשלבים.

ראשית נשים לב כי

$$\left(x + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{1}{4} \cdot \frac{b^2}{a^2}$$

נחזור למשוואה ונשלים לריבוע

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

נוציא שורש לשני האגפים ונקבל

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}$$

ולכן

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(הערה: ממילא $|a| = \pm a$ וכיוון שאנחנו לוקחים את שתי האפשרויות אין צורך בערך המוחלט.)

ועכשיו סוף סוף קיבלנו את התוצאה המוכרת

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

<u>דוגמאות נוספות ושאלה מסכמת</u>

דוגמא 1: נפתור את המשוואה הבאה:

$$x^4-3x^2+2=0$$

נציב $t=x^2$ ונקבל

$$t^2-3t+2=0$$

$$t_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=1,2$$

לכן

$$x^2=1 \quad \text{או} \quad x^2=2$$

ולכן ארבעת הפתרונות הם

$$x=\pm 1,\pm\sqrt{2}$$

דוגמא 2: נפתור את המשוואה הריבועית הבאה, כאשר a פרמטר:

$$x^2+ax-a-1=0$$

נציב בנוסחאת השורשים ונקבל

$$x_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4a+4}}{2}=\frac{-a\pm\sqrt{(a+2)^2}}{2}=\frac{-a\pm(a+2)}{2}=1,\frac{-2a-2}{2}$$

שאלה 5: ענו על כל אחד מן הסעיפים הבאים

א. הראו כי לכל x מתקיים כי $x^2+2ax+2a^2\geq 0$, כאשר a פרמטר

ב. הראו כי לפרבולה $y=x^2+ax+4a^2$ יש שורש יחיד, כאשר a פרמטר

ג. מצאו את כל הפתרונות למשוואה $x^4-2x^2-8=0$

(רמז: השלמה לריבוע, או הצבת $t=x^2$)

ד. מצאו את כל הפתרונות למשוואה $x^4+4x^3+4x^2-1=0$

(רמז: השלמה לריבוע)

ה. הראו כי אם x_1,x_2 הם שורשי הפרבולה $y=ax^2+bx+c$ אזי $y=a(x-x_1)(x-x_2)$

ו. מצאו את כל הפתרונות למשוואה $a=\frac{x^2-3x+2}{x-2}$, כאשר a פרמטר

ז. מצאו את כל הפתרונות למשוואה $a=\frac{x^2+2x+1}{|x+1|}$, כאשר a פרמטר