סמסטר א' תש"ף

שאלה 1. תזכורת: בהינתן $(G,*)$ ו-$(H,\bullet)$ חבורות, הגדרנו על המכפלה הקרטזית $G\times H$ פעולה "רכיב-רכיב":

$$(g_1,h_1)(g_2,h_2)=(g_1*g_2,h_1\bullet h_2)$$

לכל $g_1,g_2\in G,h_1,h_2\in H$. קבוצה זו עם פעולה זו נקראת המכפלה הישרה (החיצונית) של G ו-H. ודאו שאתם יודעים להוכיח שזו אכן חבורה.
הוכיחו או הפריכו:

א. החבורה $G\times H$ אבלית אם ורק אם G ו-H אבליות.

ב. אם G',H' תתי־חבורות של G,H בהתאמה, אז $G'\times H'$ תת־חבורה של $G\times H$.

ג. אם K תת־חבורה של $G\times H$, אז היא מהצורה $G'\times H'$ עבור G',H' תתי־חבורות של G,H בהתאמה.

פתרון.

א. ההוכחה לכל אחד מהתנאים בהגדרת חבורה (קיבוציות הפעולה, קיום איבר יחידה וקיום הפיך לכל איבר) נובעת מהתנאי המקביל שמתקיים עבור G ו-H שהן חבורות. יהיו $(g_1,h_1),(g_2,h_2),(g_3,h_3)\in G\times H$. אזי

$$\begin{aligned}((g_1,h_1)(g_2,h_2))(g_3,h_3)&=(g_1g_2,h_1h_2)(g_3,h_3)=(g_1g_2g_3,h_1h_2h_3)\\&=(g_1,h_1)(g_2g_3,h_2h_3)=(g_1,h_1)((g_2,h_2)(g_3,h_3))\end{aligned}$$

כי הפעולות ב-G וב-H הן קיבוציות. איבר היחידה הוא $e_{G\times H}=(e_G,e_H)$, ואכן

$$(g,h)(e_G,e_H)=(ge_G,he_G)=(g,h)=(e_Gg,e_Hh)=(e_G,e_H)(g,h)$$

לכל איבר $(g,h)\in G\times H$. ההופכי שלו הוא $\left(g^{-1},h^{-1}\right)$ מפני ש-

$$(g,h)\left(g^{-1},h^{-1}\right)=\left(gg^{-1},hh^{-1}\right)=(e_G,e_H)=\left(g^{-1}g,h^{-1}h\right)=\left(g^{-1},h^{-1}\right)(g,h)$$

ב. הוכחה. אם $G\times H$ אבלית, אזי לכל $(g_1,h_1),(g_2,h_2)\in G\times H$ מתקיים

$$(g_1g_2,h_1h_2)=(g_1,h_1)(g_2,h_2)=(g_2,h_2)(g_1,h_1)=(g_2g_1,h_2h_1)$$

ובפרט לכל $g_1,g_2\in G$ ולכל $h_1,h_2\in H$ מתקיים $g_1g_2=g_2g_1$ ו-$h_1h_2=h_2h_1$, שזו בדיוק ההגדרה לכך ש-G,H אבליות.
אם G,H אבליות, אז נחזור על הטיעון בכיוון השני.

ג. הוכחה. מפני ש-$G'\leq G$, אז $e_G\in G'$, ובאופן דומה מפני ש-$H'\leq H$, אז $e_H\in H$. לכן $(e_G,e_H)\in G'\times H'$ ולכן $G'\times H'$ לא ריקה.

יש סגירות לפעולה כי G' ו-H' סגורות לפעולה: יהיו $(g_1,h_1),(g_2,h_2)\in G'\times H'$, אזי

$$(g_1,h_1)(g_2,h_2)=(g_1g_2,h_1h_2)\in G'\times H'$$

שהרי $g_1g_2\in G'$ ו-$h_1h_2\in H'$. כך גם לגבי סגירות להופכי, אם $(g,h)\in G'\times H'$, אז $g^{-1}\in G'$ ו-$h^{-1}\in H'$, ולכן $\left(g^{-1},h^{-1}\right)\in G'\times H'$ שהוא האיבר ההופכי של (g,h).

שאלה 2. הוכיחו שלחבורה מסדר זוגי יש מספר אי-זוגי של איברים מסדר 2 (בפרט קיים איבר כזה).

הערה: קיום איבר מסדר 2 הוא גם תנאי מספיק להיותה של החבורה מסדר זוגי (למה?).

פתרון. נשים לב שאיבר $a\neq e$ הוא מסדר 2 אמ"מ הוא ההופכי של עצמו. נסדר בזוגות כל איבר בחבורה שאינו מסדר 2 עם ההופכי שלו, ונקבל ש-e נשאר לבד.

כיוון שהחבורה מסדר זוגי, בהכרח קיים איבר נוסף שלא סידרנו בזוגות, כלומר איבר מסדר 2, ולמעשה קיימים מספר אי זוגי כלשהו של איברים כאלה.

לגבי ההערה, לפי משפט לגרנז', סדר כל איבר מחלק את סדר החבורה, לכן אם קיים איבר מסדר 2, פירוש הדבר ש-2 מחלק את סדר החבורה, כלומר: סדר החבורה זוגי.

שאלה 3. תהי G חבורה. נגדיר $f\colon G\to G$ לפי $f(g)=g^2$.

א. הוכיחו שהפונקציה f היא הומומורפיזם אם ורק אם G אבלית.

ב. נניח שהחבורה G אבלית וסופית. הוכיחו שהפונקציה f היא איזומורפיזם אם ורק אם הסדר של G הוא אי-זוגי.

פתרון.

א. לכיוון הראשון, נניח שהחבורה G אבלית. יהיו $g,h\in G$. לכן

$$f(gh)=(gh)^2=ghgh=g^2h^2=f(g)f(h)$$

ולכן f הומומורפיזם. לכיוון השני, נניח ש-f הומומורפיזם. לכל $g,h\in G$ מתקיים $f(gh)=(gh)^2=ghgh$ וגם $f(gh)=f(g)f(h)=g^2h^2$, כלומר $g^2h^2=ghgh$. נצמצם ונקבל: $gh=hg$, כלומר G אבלית.

ב. לכיוון הראשון, נניח שהחבורה מסדר אי-זוגי. מכיוון שהפונקציה היא הומומורפיזם (לפי הסעיף הראשון) והחבורה סופית, מספיק להראות שהפונקציה חח"ע. לשם כך יש להסביר מדוע הגרעין הוא טריוויאלי. נניח בשלילה שקיים $g\in\ker f$ המקיים $g\neq e_G$. מהגדרת הפונקציה, $e_G=f(g)=g^2$, ולכן הסדר של g הוא 2. הסדר של g מחלק את הסדר של החבורה ולכן הסדר של החבורה הוא זוגי בסתירה להנחה.
בכיוון השני, נניח כי f היא איזומורפיזם. נניח בשלילה שהסדר של החבורה הוא זוגי, לכן יש איבר מסדר 2 (כפי שראינו בתרגול) ולכן f אינה חח"ע, כי האיבר הזה ואיבר היחידה שניהם בגרעין, שזו סתירה.

שאלה 4. הוכיחו שאם G חבורה סופית ו- $K\leq H\leq G$, אז: $[G:K]=[G:H]\cdot[H:K]$ ("כפליות האינדקס").

פתרון. לפי משפט לגרנז', מתקיים: $[G:K]=\frac{|G|}{|H|}=\frac{|G|}{|H|}\cdot\frac{|H|}{|K|}=[G:H]\cdot[H:K]$

שימו לב שהוכחה זו עובדת רק עבור G סופית, אך הטענה נכונה באופן כללי (גם עבור G אינסופית).

את המקרה הכללי אפשר להוכיח ע"י בניית פונקציה מפורשת או להסיק ישירות ממשפט האיזומורפיזם השלישי.

שאלה 5. מצאו את האינדקסים הבאים.

א. $[\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_8 : \langle(2,2)\rangle]$

ב. $[\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : \langle(2,2)\rangle]$

ג. $[2\mathbb{Z}\times S_3 : 6\mathbb{Z}\times\langle\mathrm{id}\rangle]$

פתרון.

א. הסדר של החבורה $\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_8$ הוא $8\cdot 8=64$, והסדר של תת־החבורה $\langle(2,2)\rangle$ הוא כסדר של האיבר $(2,2)$, שהוא 4. לכן לפי משפט לגראנז' $[\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_8 : \langle(2,2)\rangle]=64/4=16$.

ב. נוכיח כי $[\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : \langle(2,2)\rangle]=\infty$ לפי זה שנראה ש-$\{(0,n)+\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ היא קבוצה אינסופית של מחלקות שמאליות שונות (אלו לא כל המחלקות). אם $(0,n)+\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}=(0,m)+\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ זה אומר

$$(0,n)-(0,m)\in\langle(2,2)\rangle$$

כלומר ש-$(0,n-m)=(2k,2k)$ לאיזשהו $k\in\mathbb{Z}$. לכן $n-m=0$, ולכן $n=m$. כלומר יש אינסוף מחלקות שמאליות שונות.

ג. אינדקס של תת־חבורות הוא כפלי (הוכיחו!). כלומר אם $K\le H\le G$, אז

$$[G:K]=[G:H]\,[H:K]$$

בפרט נקבל

$$[2\mathbb{Z}\times S_3 : 6\mathbb{Z}\times\langle\mathrm{id}\rangle]=[2\mathbb{Z}\times S_3 : 6\mathbb{Z}\times S_3]\,[6\mathbb{Z}\times S_3 : 6\mathbb{Z}\times\langle\mathrm{id}\rangle]$$

ולכן נוכל לחשב בנפרד. המחלקות השמאליות של $6\mathbb{Z}\times S_3$ בחבורה $2\mathbb{Z}\times S_3$ הן

$$\{(0,\mathrm{id})\,(6\mathbb{Z}\times S_3)\,,(2,\mathrm{id})\,(6\mathbb{Z}\times S_3)\,,(4,\mathrm{id})\,(6\mathbb{Z}\times S_3)\}$$

וכמובן שיש העתקה חח"ע ועל למחלקות השמאליות של $6\mathbb{Z}$ ב-$2\mathbb{Z}$. באופן דומה, את האינדקס של $6\mathbb{Z}\times\langle\mathrm{id}\rangle$ ב-$6\mathbb{Z}\times S_3$ אפשר לחשב לפי האינדקס של $\langle\mathrm{id}\rangle$ ב-S_3, שהוא 6. לכן האינדקס המבוקש הוא $3\cdot 6=18$.

שאלה 6. הוכיחו שאם $H\le G$ היא מאינדקס 2 אז $a^2\in H$ לכל $a\in G$.

פתרון. יהי $a\in G$. נחלק למקרים: אם $a\in H$, אז $a^2\in H$ מסגירות H.
אחרת, $a\notin H$ ולכן H,aH שונים זה מזה, כלומר: אלה כל הקוסטים (מהנתון יש בדיוק שניים).
נניח בשלילה כי $a^2\notin H$ אז $a^2\in aH$ ולכן $a^2H=aH$ ומכאן (לפי טענה שראינו) $a^{-1}a^2\in H$ כלומר $a\in H$, סתירה.

תרגיל 7. תהי G חבורה מסדר 8.

א. הוכיחו שאם G ציקלית, אז יש לה תת־חבורה מסדר 4 (למה ברור כי תת־החבורה כאן היא ציקלית?).

ב. הוכיחו שאם G לא אבלית, אז יש לה תת־חבורה ציקלית מסדר 4 (כאן הציקליות של תת־החבורה לא ברורה מיידית).

ג. מצאו דוגמה נגדית לסעיף הקודם אם G אבלית.

ד. (רשות) נכליל למקרה שבו G היא חבורה לא אבלית מסדר 2^t עבור $t > 2$. הוכיחו שיש לה תת־חבורה ציקלית מסדר 4.

פתרון.

א. נניח $G = \langle g \rangle$ ציקלית מסדר 8 עם יוצר g. אזי קיימת תת־החבורה הציקלית שנוצרת על ידי $\langle g^2 \rangle = \{e, g^2, g^4, g^6\}$.

ב. תהא G חבורה לא אבלית. לפי משפט לגראנז', הסדר של כל איבר בחבורה סופית מחלק את סדר החבורה. לכן הסדרים האפשריים היחידים בחבורה מסדר 8 הם 1, 2, 4 או 8 (לא בהכרח כל הסדרים משתתפים).
יש רק איבר אחד מסדר 1 והוא איבר היחידה. לא ייתכן כי כל שאר האיברים הם מסדר 2, שכן לפי תרגיל שראינו נקבל כי G אבלית. אין בחבורה איבר מסדר 8, שכן אז היא תהיה ציקלית, וכל חבורה ציקלית היא אבלית. מכאן קיים איבר, נאמר $a \in G$, שהוא מסדר 4. הסדר של איבר הוא הסדר של תת־החבורה הציקלית $\{e, a, a^2, a^3\}$ שהוא יוצר.

ג. במקרה זה G לא יכולה להיות ציקלית. נבחר את $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. אפשר לבדוק שהסדר של כל איבר בחבורה זו הוא 2, פרט לאיבר היחידה. לכן אין לה תת־חבורה ציקלית מסדר 4.

ד. באופן דומה לשאלה האחרונה, הסדרים האפשריים היחידים בחבורה מסדר 2^t (כאשר $t > 2$) הם רק מן הצורה 2^k עבור $k \in \{0, 1, 2, \ldots, t\}$. ישנו רק איבר אחד מסדר 1. הסדר של כל שאר האיברים לא יכול להיות 2, כי אז G אבלית. אין איבר מסדר 2^t, שכן אז החבורה ציקלית ולכן אבלית. לכן קיים איבר, נאמר $a \in G$, כך ש-$o(a) = 2^k > 2$.
נתבונן בתת־החבורה שיוצר האיבר $a^{2^{k-2}}$. ראינו שמתקיים

$$o(a^{2^{k-2}}) = \frac{o(a)}{(o(a), 2^{k-2})} = \frac{2^k}{(2^k, 2^{k-2})} = 4$$

וקיבלנו שזהו איבר שיוצר תת־חבורה ציקלית מסדר 4, כדרוש.

בהצלחה!