פתרון מבחן מועד ב' – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 03/03/16

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 20 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

משך המבחן: שלוש שעות.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^x-1\right)\cdot\sin\left(\ln(1+x^5)\right)}{\left(1-\cos(x)\right)^3 x^x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\sin(\ln(1+x^5))}{\ln(1+x^5)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\ln(1+x^5)}{x^5}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(\frac{x^2}{1-\cos(x)}\right)^3}_{\to 2^3}\cdot\underbrace{\frac{1}{x^x}}_{\to 1}=8$$

כיוון ש

$$\lim_{x\to 0^+}x^x=\{0^0\}=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln(x^x)}=\lim_{x\to 0^+}e^{x\ln(x)}=e^0=1$$

כיוון ש

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln(x)=\{0\cdot(-\infty)\}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}=\left\{\frac{-\infty}{\infty},L'Hopital\right\}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-x=0$$

ב. $$\lim_{x\to 0^+}\left(\cos(x)\right)^{\ln(x)}$$

$$\lim_{x\to 0^+}(\cos(x))^{\ln(x)}=\left\{\begin{matrix}\cos(x)\to 1\\ \text{כלל ה}e\end{matrix}\right\}=e^{\lim_{x\to 0^+}\ln(x)(\cos(x)-1)}=e^0=1$$

כיוון ש

$$\lim_{x\to 0^+}\ln(x)\left(\cos(x)-1\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(x)-1}{x^2}\cdot x\ln(x)\cdot x=\left\{-\frac{1}{2}\cdot 0\cdot 0\right\}=0$$

ג. $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(2^n+n\right)}$$

$$\sqrt[n]{2^n\left(1+\frac{n}{2^n}\right)}=2\cdot\left(1+\frac{n}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}}\to 2\cdot(1+0)^0=2$$

2.

א. חשבו את $\int \frac{1}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)\left(e^{x}-1\right)} dx$

$$\int \frac{1}{(e^{x}+e^{-x})(e^{x}-1)} dx = \left\{ \begin{matrix} t = e^{x} \\ dt = e^{x}dx \\ x = \ln(t) \\ dx = \frac{1}{t}dt \end{matrix} \right\} = \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{t}\right)(t-1)} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{(t^{2}+1)(t-1)} dt =$$

$$\frac{1}{(t^{2}+1)(t-1)} = \frac{At+B}{t^{2}+1} + \frac{C}{t-1}$$

$$1 = (At+B)(t-1) + C(t^{2}+1)$$

נציב $t = 1$

$$1 = 2C \rightarrow C = \frac{1}{2}$$

נציב $t = 0$

$$1 = -B + \frac{1}{2} \rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

נציב $t = -1$

$$1 = \left(-A - \frac{1}{2}\right) \cdot (-2) + 1 \rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

סה"כ

$$\frac{1}{(t^{2}+1)(t-1)} = \frac{1}{2}\left[-\frac{t+1}{t^{2}+1} + \frac{1}{t-1}\right]$$

$$\int \frac{t+1}{t^{2}+1} dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t+2}{t^{2}+1} dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^{2}+1} dt + \int \frac{1}{t^{2}+1} dt = \frac{1}{2}\ln(t^{2}+1) + \arctan(t)$$

כעת נחזור

$$= \int \frac{1}{(t^{2}+1)(t-1)} dt = -\frac{1}{4}\ln(t^{2}+1) - \frac{1}{2}\arctan(t) + \frac{1}{2}\ln|t-1| + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln(e^{2x}+1) - \frac{1}{2}\arctan(e^{x}) + \frac{1}{2}\ln|e^{x}-1| + C$$

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_0^\infty xe^{-x}dx$, ואם כן חשבו אותו.

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx = \begin{Bmatrix} f' = e^{-x} & g = x \\ f = -e^{-x} & g' = 1 \end{Bmatrix} = [-xe^{-x}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx = [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^\infty =$$

כעת צריך לחשב את הגבול באינסוף

$$\lim_{x\to\infty} -e^{-x}(x+1) = \lim_{x\to\infty} -\frac{x+1}{e^x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}, \text{סדרי גודל}\right\} = 0$$

ולכן סה"כ

$$= 0 - (-1) = 1$$

כיוון שהגבול סופי, זה אומר לפי ההגדרה שהאינטגרל מתכנס.

3.

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $xe^x = 1$, והוכיחו תשובתכם.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = xe^x - 1$$

$$h'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

כאשר $x < -1$ הנגזרת שלילית והפונקציה יורדת

כאשר $x > -1$ הנגזרת חיובית והפונקציה עולה

סה"כ המינימום הגלובאלי שלה הוא ב$x = -1$ (היא יורדת עד אליו, ועולה אחריו)

$$h(-1) = -\frac{1}{e} - 1 < 0$$

בכל תחום עלייה או ירידה, כלומר $(-\infty, -1], [-1, \infty)$ יכול להיות לכל היותר פתרון יחיד.

$$\lim_{x\to\infty} xe^x - 1 = \infty$$

ולכן קיימת נקודה $x_1 > -1$ בה $f(x) > 0$ ולכן לפי ערך הביניים הפונקציה חותכת את הציר בין $-1, x_1$

כעת

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x - 1 = -1$$

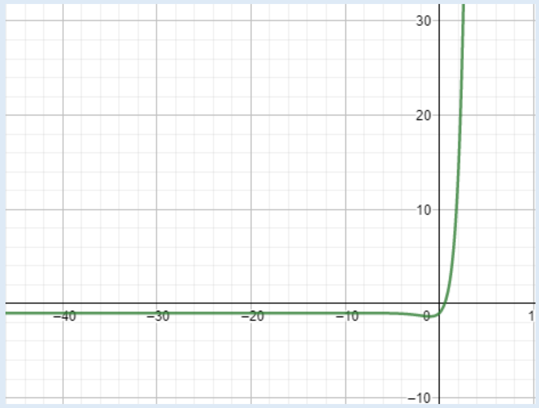
כיוון ש

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \{-\infty \cdot e^{-\infty} - 1\} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \left\{\frac{-\infty}{\infty}, L'Hopital\right\} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \left\{\frac{1}{-\infty}\right\} = 0$$

כיוון שהפונקציה יורדת בתחום זה ושואפת משמאל למספר שלילי, היא לא יכולה לחתוך את הציר.

סה"כ יש פתרון יחיד למשוואה.

המחשה:



ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $e^x = \ln(x)$, והוכיחו תשובתכם.
(רמז: הפרידו למקרים $x > 1$, $x \le 1$)

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = e^x - \ln(x)$$

$$h'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(xe^x - 1)$$

כאשר $x \ge 1$ קל לראות כי $h'(x) > 0$ ולכן הפונקציה עולה בתחום זה.

$$h(1) = e$$

ולכן אין חיתוך בתחום זה.

נותר התחום $0 < x \le 1$ אבל בתחום זה הln שלילי!

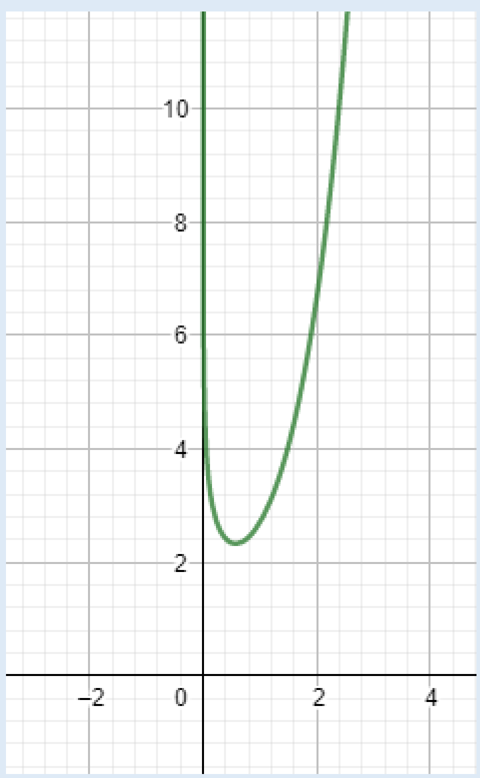
ולכן בתחום זה

$$h(x) > 0$$

ושוב אין חיתוך.

סה"כ, אין פתרונות למשוואה.

המחשה:



4. (אין קשר בין הסעיפים)

א. הוכיחו שלכל $1<x<e$ מתקיים כי $\frac{(\ln(x))^2}{x-1} \le \frac{2\ln(x)}{x}$

יהי x בקטע $1 < x < e$

נפעיל את משפט לגראנז' על הפונקציה $f(x) = (\ln(x))^2$ בקטע $[1, x]$

קיימת נקודה $1 < c < x$ כך ש

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$\frac{2\ln(c)}{c} = \frac{\ln^2(x)}{x - 1}$$

רוצים להוכיח כי

$$\frac{\ln^2(x)}{x-1} = \frac{2\ln(c)}{c} \le \frac{2\ln(x)}{x}$$

מספיק להוכיח כי הפונקציה $h(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$ עולה בתחום, ואז כיוון ש $c < x$ נובע ש $h(c) \le h(x)$

נגזור

$$h'(x) = \frac{2 - 2\ln(x)}{x^2} = \frac{2}{x^2}(1 - \ln(x))$$

כיוון שאנחנו בתחום $[1, e]$ נובע כי h' בתחום זה הנגזרת חיובית, ואכן הפונקציה h עולה.

ב. נתון כי f רציפה בכל הממשיים, וכי $f(1)=1$.

הוכיחו כי קיים c כך ש $f(c) = -\ln(c)$.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = f(x) + \ln(x)$$

$$h(1) = f(1) + \ln(1) = 1$$

בחדוא כשאי אפשר להציב, מחשבים גבול.

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) + \ln(x) = \{f(0) - \infty\} = -\infty$$

לכן קיימת נקודה בה $h < 0$ בינה לבין 1 הפונקציה h רציפה כצירוף רציפות ולכן לפי ערך הביניים חותכת את הציר.

5. תהי סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n - 1}$ ותנאי ההתחלה $a_1 = 2$

א. הוכיחו כי הסדרה מונוטונית עולה.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n - 1}$$

צ"ל שזה גדול או שווה לאפס, וזה שקול לכך ש $a_n \ge 1$

נוכיח זאת באינדוקציה.

בדיקה: אכן $a_1 = 2 > 1$

יהי n עבורו $a_n > 1$ צ"ל כי $a_{n+1} > 1$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n - 1} > 1 + 0$$

ב. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

נב"ש שהגבול אינו אינסוף, כיוון שהסדרה עולה זה אומר שהיא חסומה ויש לה גבול סופי נסמנו $a_n \to L$

נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim a_n + \frac{1}{a_n - 1}$$

$$L = L + \frac{1}{L-1}$$

הערה: לא ייתכן כי $L = 1$ כיוון ש$L \geq 2$ (הסדרה עולה, וכל איבריה גדולים או שווים לאיבר הראשון).

ולכן

$$0 = \frac{1}{1-L}$$

סתירה.

6.

א. חשבו את גבול הסדרה $\mathrm{a}_n = \frac{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}{n^4}$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^4} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^3$$

לכן מדובר בסכומי רימן של הפונקציה $f(x) = x^3$ הרציפה בקטע $[0,1]$ לפי חלוקה לn קטעים שווים, עם בחירה הנקודות בקצוות הימניים של הקטעים ולכן

$$a_n \to \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

ב. חשבו את $\frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\right)$ עד רמת דיוק של $h = 0.001$

נעשה קירוב טיילור עם הפונקציה

$$f(x) = \frac{1}{3}\cos(x)$$

הנקודה הרצוייה היא $x = \frac{1}{3}$ הנקודה המצוייה היא $a = 0$

נשים לב כי כל הנגזרות הן שליש של פלוס או מינוס סינוס או קוסינוס

ולכן $\left|f^{(n+1)}\right| \leq \frac{1}{3}$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{3} - 0\right)^{n+1}$$

ולכן

$$|R_n| \leq \frac{1}{3^{n+2}(n+1)!}$$

עבור $n = 4$ אכן

$$|R_4| \leq \frac{1}{3^6 \cdot 5!} < \frac{1}{1000}$$

נחשב את פולינום הטיילור (במבחן צריך לפרט) ונציב בו ונקבל את הקירוב:

$$\frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\right) \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4$$