ב"א אנליזה 1 תשעו מועד א

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(\ln\left(1+x\right)\right)\cdot x\cdot\sin\left(e^{x}\right)}{1-\cos(x)}$

פתרון: נציג את הגבול כמכפלה של גבלות ידועים

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\ln\left(1+x\right)\right)\cdot x\cdot\sin\left(e^{x}\right)}{1-\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\ln\left(1+x\right)\right)}{\ln\left(1+x\right)}\cdot\frac{\ln\left(1+x\right)}{x}\cdot\frac{x^{2}}{1-\cos(x)}\cdot\sin\left(e^{x}\right)\cdot\frac{x}{x}$$
$$=1\cdot 1\cdot 2\cdot\sin(1)=2\sin(1)$$

(ב) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\cos(x)\right)^{x}$

פתרון: כיוון

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\cos(x)\right)^{x}=\lim_{x\to 0}e^{\ln(1-\cos(x))^{x}}=\lim_{x\to 0}e^{x\ln(1-\cos(x))}=e^{\lim_{x\to 0}x\ln(1-\cos(x))}$$

ונחשב

$$\lim_{x\to 0}x\ln\left(1-\cos(x)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-\cos(x)\right)}{\frac{1}{x}}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}}{-\frac{1}{x^{2}}}=\lim_{x\to 0}-\sin(x)\cdot\frac{x^{2}}{1-\cos(x)}=-0\cdot 2=0$$

ולכן הגבול המבוקש הוא $e^{0}=1$.

(ג) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^{2}}}$

פתרון: נשתמש בכלל המנה: נגדיר $a_{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^{2}}$ואז

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n}}=a_{n+1}\cdot\frac{1}{a_{n}}=\frac{(2n+2)!}{\left((n+1)!\right)^{2}}\cdot\frac{(n!)^{2}}{(2n)!}=\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\cdot\frac{(n!)^{2}}{\left((n+1)!\right)^{2}}=$$

$$=\left(2n+1\right)\left(2n+2\right)\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^{2}=\frac{4n^{2}+6n+2}{n^{2}+2n+1}=\frac{n^{2}\left(4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^{2}}\right)}{n^{2}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^{2}}\right)}\to 4$$

ולכן, מכיוון ש $\frac{a_{n+1}}{a_{n}}\to 4$ גם $\sqrt[n]{a_{n}}\to 4$ וזה הגבול המבוקש בשאלה.

2. נביט בפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^{x}-1-x}{x^{2}} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$$

(א) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x=0$? אחרת, איזה סוג אי-רציפות יש ב $x=0$?
פתרון: על מנת שהפונקציה תהיה רציפה ב $x=0$ צריך להתקיים

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

כלומר

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=a$$

מתקיים

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}$$

ולכן רק עבור $a=\frac{11}{2}$ מתקיים השיוויון הדרוש והפונקציה רציפה. לכל $a\neq\frac{1}{2}$ תהיה נקודת אי-רציפות סליקה (שהרי אפשר להחליף את הערך ב 0 להיות $\frac{1}{2}$ ואז הפונקציה רציפה).

(ב) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x=0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלו?
פתרון: פונקציה שגזירה בנקודה, רציפה בה. לכן נבדוק רק עבור $a=\frac{1}{2}$ (שזה המקרה היחיד בו f רציפה ב $x=0$) אם f גזירה ב $x=0$. לפי הגדרה, צריך לחשב את הגבול

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

נחשב:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1-x}{x^2}-\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2}{x^3}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{3x^2}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{6x}=\frac{1}{6}$$

כלומר $f'(0)$ קיימת וסופית ומתקיים $f'(0)=\frac{1}{6}$.

3. (אין קשר בין הסעיפים)

(א) מצאו את הערך המקסימאלי והערך המינמאלי של הפונקציה $f(x)=x^8-x^9$ בקטע $[0,1]$.
פתרון: נגזור

$$f'(x)\quad=\quad 8x^7-9x^8=x^8\left(8-9x\right)$$

ולכן f' מתאפסת אמ"מ $x=0$ או $x=\frac{8}{9}$. בנוסף, לפי הטבלה

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{9}$	1
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$

נסיק שהפונקציה f עולה ממש ב $\left(0,\frac{8}{9}\right)$ ויורדת ממש ב $\left(\frac{8}{9},1\right)$ ולכן $\frac{8}{9}$ הוא נקודת מקסימום של f בקטע $[0,1]$ והערך בה הוא

$$f\left(\frac{8}{9}\right)=\left(\frac{8}{9}\right)^8-\left(\frac{8}{9}\right)^9$$

ומכיוון שהפונקציה f עולה ממש ב $\left(0,\frac{8}{9}\right)$ ויורדת ממש ב $\left(\frac{8}{9},1\right)$ נסיק כי הערך המינמאלי מתקבל באחת הקצוות ולכן ערך זה הוא:

$$\min\left\{f(0),f(1)\right\}=\min\left\{0,0\right\}=0$$

(ב) הוכיחו כי לכל $x>0$ מתקיים כי $e^x-1\leq xe^x$

פתרון: לכל $x>0$ מתקיים כי הפונקציה $g(t)=e^t$ רציפה בקטע $[0,x]$ וגזירה בו ולכן לפי משפט לגרנז' קיימת נקודה $0<c<x$ כך ש

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(c)$$

או מפורשות

$$\frac{e^x-1}{x}=e^c$$

ולכן $e^x-1=xe^c$ ומכיוון ש g פונקציה מונוטונית עולה (ו $x,g(x)$ חיוביים), מתקיים

$$e^x-1=xe^c\leq xe^c$$

כנדרש.

.4

(א) הוכיחו שקיימת נקודה $c\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ עבורה $\tan(c)=c$.

פתרון: נגדיר פונקציה

$$f(x)=\tan(x)-x$$

ונרצה להוכיח שיש לה שורש בקטע $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. נגזור

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}-1$$

שמתאפסת אמ"מ $\cos^2(x)=1$ וזה קורה בקטע $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ רק בנקודה $x=0$. לכן מהטבלה

x	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

נסיק שהפונקציה f עולה ממש ב $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ולכן יש לה לכל היותר שורש אחד בקטע הזה. בנוסף,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan(x)-x=\left\{\infty-\frac{\pi}{2}\right\}=\infty$$
$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}f(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\tan(x)-x=\left\{-\infty+\frac{\pi}{2}\right\}=-\infty$$

ולכן קיימות נקודות $-\frac{\pi}{2}<c<0$ ו $0<d<\frac{\pi}{2}$ כך ש $f(c)<0$ ו $f(d)>0$. מכיוון ש f רציפה ב $[c,d]$ ומחליפה סימן שמה, לפי משפט ערך הביניים, יש לה שמה שורש. מכיוון שי לה לכל היותר שורש אחד אז בסה"כ יש לה בדיוק שורש 1 (בקטע $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

(ב) הוכיחו שהנקודה c מסעיף קודם - יחידה (כלומר אין שתי פתרונות שונים למשוואה $x=\tan(x)$ בקטע $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$) .

פתרון: בסעיף הקודם הוכחנו זאת.

5. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1}=a_n^2+1$ וכן נתון $a_1>0$.

(א) הוכיחו כי הסדרה עולה.

פתרון: טענה: לכל n מתקיים $a_{n+1}>n$.

- בסיס $n=1$: נתון ש $a_1>0$ ולכן $a_2=a_1^2+1>1$.

- צעד - נניח נכונות עבור n, כלומר $a_{n+1} > n$. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר $a_{n+2} > n+1$. מכיוון ש $a_{n+1} > 1$ נקבל ש $\left(a_{n+1}\right)^2 > a_{n+1}$ ולכן, לפי הגדרה:

$$a_{n+2} = a_{n+1}^2 + 1 > a_{n+1} + 1 > n + 1$$

ולכן, מכיוון ש $n \to \infty$, נקבל לפי חצי סנוויץ כי $a_{n+1} \to \infty$ ולכן גם $a_n \to \infty$.
בנוסף, לכל n בפרט מתקיים $a_{n+1} > 1$ ולכן $\left(a_{n+1}\right)^2 > a_{n+1}$ ולכן, לפי הגדרה:

$$a_{n+2} = a_{n+1}^2 + 1 > a_{n+1} + 1 > a_{n+1}$$

וקיבלנו ש $a_{n+2} > a_{n+1}$. בשביל להראות שהסדרה עולה נותר להוכיח ש $a_2 > a_1$ (זה הזוג היחידי שאי אפשר להסיק מ $a_{n+2} > a_{n+1}$ כיוון ש n טבעי). נטפל בו פרטנית: אם $a_1 \geq 1$ אז $a_2 = a_1^2 + 1 > a_1 + 1 > a_1$. אחרת $a_1 < 1$ וראינו ש $a_2 > 1 > a_1$ וסיימנו.

(ב) חשבו את גבול הסדרה $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
פתרון: ראינו בסעיף הקודם ש $a_n \to \infty$.