

# תרגיל 7

## 11.1.17 להגשה עד

### שאלה 1

יהי  $(X, \mathbb{A}, \mu)$  מ"ח,  $a \in (0, \infty)$ ,  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  פונקציה מדידה כך ש:

$$0 < c := \int_X f d\mu < \infty$$

הוכיחו כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X n \log \left( 1 + \left( \frac{f}{n} \right)^a \right) d\mu = \begin{cases} c & a = 1 \\ \infty & 0 < a < 1 \\ 0 & 1 < a < \infty \end{cases}$$

תזכורת: אם  $0 \leq t$  ו- $1 \leq a$  אז  $1 + t^a \leq (1+t)^a \leq e^{at}$ .

### שאלה 2

תנו דוגמא לאי קיום משפט ההתכנסות המונוטונית עבור סדרה יורדת של פונקציות מדידות ואי שליליות.

### שאלה 3

יהי  $(X, S, \mu)$  מ"ח סופית. הוכיחו כי פונקציה מדידה ואי שלילית היא אינטגרבילית אם

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x : f(x) \geq n\}) < \infty$$

### שאלה 4

יהי  $(X, S, \mu)$  מ"ח סופית ותהי  $f \in L^1(\mu)$  אי שלילית. הראו שמתקיים:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \int_X f^\alpha d\mu = \int_X f d\mu$$

### שאלה 5

יהי  $(X, S, \mu)$  מ"ח  $\sigma$ -סופי. ונניח כי  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  הינה אינטגרבילית ואי שלילית. הוכיחו כי אם  $\epsilon > 0$  אזי קיימת  $A \in S$  כך ש  $\mu(A) < \infty$  ומתקיים

$$\epsilon + \int_A f d\mu > \int_X f d\mu$$

## שאלה 6

יהי  $(X, \mathbb{A}, \mu)$  מרחב מידה חיובית  $\sigma$ -סופית, ותהי  $f$  פונקציה אי שלילית, מדידה- $\mu$ , המקיימת:  $\int_X f d\mu = \infty$ .  
הראו שלכל  $M > 0$  קיימת פונקציה  $g$  מדידה- $\mu$ , כך ש:  $0 \leq g(x) \leq f(x)$  (כב"מ), וכן מתקיים:

1.  $\int_X g d\mu \geq M$ .

2.  $g$  חסומה (כב"מ).

3.  $\mu([g \neq 0]) < \infty$ .

**בהצלחה!!**