אבנר סופר

אוניברסיטת תל אביב

מבוא לפיזיקה מודרנית

תורת היחסות הפרטית

תנע ואנרגיה יחסותיים

חוקי ניוטון

אמרנו שמערכת אינרציאלית היא מערכת שבה מתקיימים חוקי ניוטון.

חוקי ניוטון במכניקה הלא יחסותית הם:

1. כל גוף ממשיך בתנועתו במהירות קבועה כל עוד לא פועל עליו כוח.
2. גוף שפועל עליו כוח $\vec{F}$ יאיץ בתאוצה הנתונה ע"י $\vec{F} = m\vec{a}$.
3. עבור כל כוח קיים כוח תגובה בעל גודל שווה וכוון הפוך.

במכניקה יחסותית עלינו לבחון שוב את החוקים הללו:

1. החוק הראשון נשאר כפי שהיה, כנובע מהגדרתנו של מערכות אינרציאליות.
2. את החוק השני נצטרך לשנות, כי בצורתו הניוטונית הוא חוזה שמהירותו של גוף אינה מוגבלת.

שימו לב שצורה אחרת לנסח חוק זה היא $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, כאשר $\vec{p} = m\vec{v}$ הוא התנע, שהוא גודל שנשמר עבור מערכת סגורה.

אנו נבחר לשמור על הניסוח $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, עם הגדרה חדשה של התנע $\vec{p}$.

הגדרת התנע תהיה כזו שבגבול הניוטוני (מהירויות נמוכות) מקבלים חזרה $\vec{p} = m\vec{v}$.

כדי שהגדרתנו החדשה תהיה שימושית לא פחות מ- $\vec{p} = m\vec{v}$, נדרוש שחוק שימור התנע מתקיים.

3. החוק השלישי נשאר תקף, אך משום שסימולטניות אינה נשמרת בפיזיקה יחסותית, נגביל את החוק לכוחות שפועלים על אותה נקודה באותו זמן (ולא, למשל, כוחות הפועלים בשני קצוות שונים של אותו מוט).

הגדרה חדשה לתנע

אם כן, המשימה היא לנסח תנע שיקיים את מה שלמדנו עד כה על תורת היחסות, ששואף לתנע הניוטוני בגבול של מהירויות נמוכות, ושנשמר באינטראקציה בין גופים.

כוון התנע:

אנו נניח שהתנע של גוף הוא באותו כוון כמו וקטור מהירות הגוף.

ההצדקה להנחה זו היא שזהו הכוון היחיד המועדף, היחיד שנובע מגודל רלוונטי לבעיה. כל כוון אחר אינו קשור לבעיה.

הערה: טיעון זה הוא דוגמה לשיטת חשיבה נפוצה בפיזיקה, המסתמכת על כך שרק הגדלים הקיימים בבעיה יכולים להיות רלוונטים. מאחר שכוון המהירות של הגוף הוא הכוון היחיד בבעיה (כלומר, אין כוונים אחרים, כגון זה של שדה חשמלי, כוחות חיצוניים, ציר סיבוב, וכו'), זה חייב להיות הכוון של כל וקטור רלוונטי (במקרה זה, תנע).

גודל התנע:

במהירות נמוכה, על גודל התנע לשאוף ל-mv. אך הוא יכול להיות שונה במהירויות גבוהות.

ביטוי שממלא תנאים אלה הוא

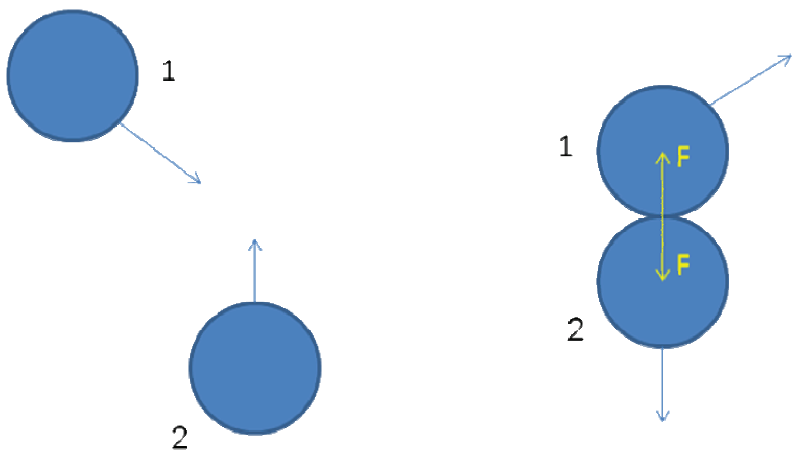
$$\vec{p} = f(v^2)m\vec{v}$$

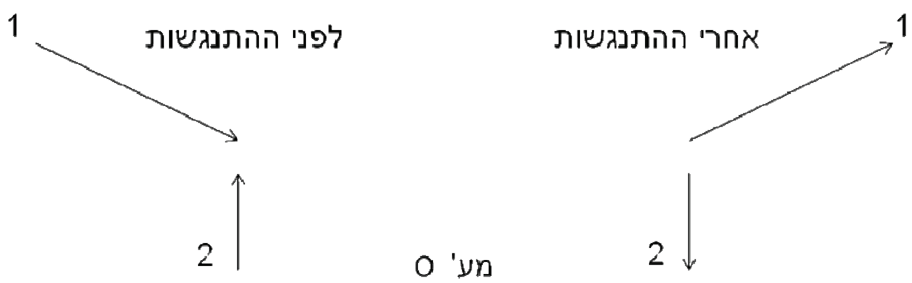
כאשר $f(v^2)$ היא פונקציה רציפה המקיימת $f(0)=1$.

(בעקרון, הקירוב הניוטוני מתקבל גם אם נדרוש כי $f(v^2\to 0)\to 1$, ונאפשר לה להיות סופית אך לא רציפה ב-0. אך אין באי הרציפות הזו שום תועלת. לכן דורשים $f(0)=1$ כאשר $f(v^2)$ רציפה.)

כעת עלינו למצוא מהי פונקציה זו.

לשם כך, נתבונן בניסוי התנגשות בין שני גופים ונדרוש את שימור התנע במערכת מסוימת O.
אח"כ נעבור ל-'O באמצעות טרנספורמצית מהירויות, ונדרוש אם שימור התנע גם שם.
מתוך דרישה זו נקבל את תלות התנע במהירות.
כדי לבצע זאת יחסית בקלות, נתבונן בהתנגשות אלסטית בה אחד הגופים נע רק בכוון y:



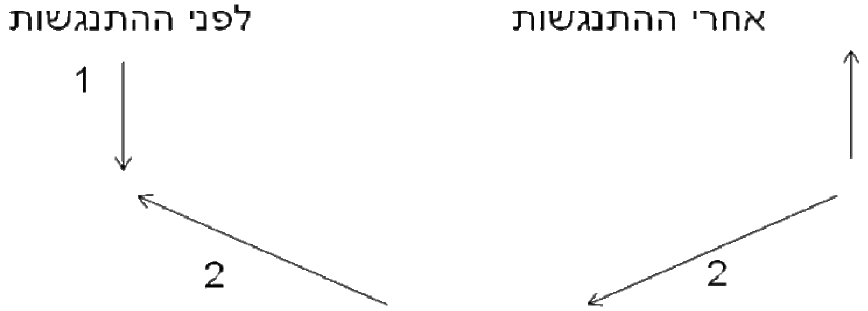


שני כדורים קשים, חסרי חיכוך, ובעלי אותה מסה מובאים לידי התנגשות,
כך שברגע ההתנגשות הכוח הנורמלי ביניהם הוא רק בכוון y, כוון תנועת גוף 2 במערכת O.
במערכת O, התנעים של שני הכדורים בכוון y שווים והפוכים: $p_{y,1} = -p_{y,2}$.
במערכת זו יש לכדור 1 תנע בכוונים x ו-y, ולכדור 2 תנע בכוון y בלבד, גם אחרי ההתנגשות.
כלומר, בעקבות ההתנגשות שני הכדורים רק הופכים את כווני תנועותיהם בכוון y.
בציור התחתון, החצים מראים את התנעים של שני הכדורים.

נסמן את שני רכיבי המהירות של כדור 1 ע"י v_x ו- v_y.

כעת נעבור למערכת 'O, הנעה במהירות v_x ביחס ל-O,

כך שב-'O, לכדור 2 תנע בכוונים x ו-y, ולכדור 1 תנע בכוון y בלבד:



שימו לב לסימטריה בין שתי התמונות: במעבר מ-O ל-'O, הכדורים החליפו תפקידים עד כדי הסימנים של התנעים שלהם.

ב-O, השינויים בתנעים של שני הכדורים בעקבות ההתנגשות הם $\Delta p_{1,y}$ ו- $\Delta p_{2,y}$.

שימור התנע מחייב שגדלים אלה יהיו שווים והפוכים:

$$\Delta p_{1,y} = -\Delta p_{2,y}$$

בשל הסימטריה האמורה בין שתי התמונות בשתי המערכות, אנו מסיקים כי:

- שינוי התנע של כדור 2 ב-O שווה לשינוי התנע של כדור 1 ב-'O, עם היפוך סימן:

$$\Delta p_{2,y} = -\Delta p'_{1,y}$$

נציב זאת במשוואה הראשונה ונקבל

$$\Delta p_{1,y} = \Delta p'_{1,y},$$

כלומר, שינוי התנע של כדור 1 זהה בשתי המערכות.

מאחר שהתנע הכולל בכוון y הוא 0, רואים כי **גודל** התנע של כדור 1 נשמר בהתנגשות, ורק **כוונו** מתהפך.

לכן שינוי התנע שלו שווה למינוס פעמיים התנע התחילי. אז המשוואה האחרונה הופכת לביטוי

$$-2f(v^2)mv_y = -2f(v'^2)mv'_y,$$

כאשר המהירויות הן המהירויות של כדור 1 בשתי המערכות (והורדנו את ה-"1" כדי לפשט).

נצמצם ב- $-2m$:

$f(v^2)v_y = f(v'^2)v'_y$. (נקרא לזו משוואת שימור התנע, כי קיבלנו אותה מדרישה זו)

מאחר שלכדור 1 אין רכיב מהירות בכוון x ב-'O, אז

$v' = v'_y$,

ואז משוואת שימור התנע הופכת להיות

$f(v^2)v_y = f\left(v'^2_y\right)v'_y$.

כעת נשתמש בכלל הטרנספורמציה עבור מהירות בניצב לכוון הבוסט:

$v'_y = \dfrac{v_y}{\gamma(\beta)(1-\beta v_x)}$, כאשר $\beta = v_x$ היא מהירות הבוסט.

כלומר, $v'_y = \dfrac{\sqrt{1-v_x^2}}{(1-v_x^2)}v_y = \dfrac{v_y}{\sqrt{1-v_x^2}}$.

נציב זאת במשוואת שימור התנע, ונקבל

$f(v^2)v_y = f\left(\dfrac{v_y^2}{1-v_x^2}\right)\dfrac{v_y}{\sqrt{1-v_x^2}}$, או, לאחר צמצום v_y בשני הצדדים:

$$f(v^2) = f\left(\frac{v_y^2}{1-v_x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-v_x^2}} \quad (1)$$

פתרון משוואה זו ייתן את הפונקציה שאנחנו מחפשים.

נשים לב שמשוואה (1) נפתרת ע"י $f(v^2) = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, שהוא פתרון שמקיים את תנאי הגבול $f(0) = 1$.

כדי להוכיח שזה הפתרון, נציב אותו במשוואה (1), ונקבל (כאשר נשתמש בכך ש- $v^2 = v_x^2 + v_y^2$)

$$\frac{1}{\sqrt{1-v_x^2-v_y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v_y^2}{1-v_x^2}}}\frac{1}{\sqrt{1-v_x^2}} .$$

קל להוכיח שזוהי זהות ע"י התבוננות במכנה של צד ימין:

$$\left(1-\frac{v_y^2}{1-v_x^2}\right)\left(1-v_x^2\right)=1-v_x^2-\frac{v_y^2}{1-v_x^2}\left(1-v_x^2\right)=1-v_x^2-v_y^2$$ מ.ש.ל.

ליתר בטחון, **נוכיח שזהו פתרון יחיד** ע"י הנחה שהפתרון אינו יחיד. אז ללא הגבלת הכלליות, ניתן לכתוב את הפתרון הכללי בצורה

$$f(v^2)=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,g(v^2),$$

כאשר $g(v^2)$ היא פונקציה המקיימת את התנאי $g(0)=1$, כזו שמשוואה (1) מתקיימת.

הצבת פתרון זה במשוואה (1) נותנת

$$(2)\quad g\left(v^2\right)=g\left(\frac{v_y^2}{1-v_x^2}\right).$$

נשים לב שעבור כל ערך של $v^2=v_x^2+v_y^2$ יתכנו אינסוף ערכים שונים של $\frac{v_y^2}{1-v_x^2}$.

אז משוואה (2) אינה יכולה להיות שוויון אלא אם $g\left(v^2\right)$ בלתי תלויה בארגומנט שלה, כלומר, $g\left(v^2\right)=const$.

אז מכאן ומהתנאי $g(0)=1$ נסיק שחייב להתקיים $g\left(v^2\right)=1$.

כלומר, הפתרון $f(v^2)=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ הוא יחיד.

אם כן,

$$f(v^2)=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}=\gamma(v),$$

כלומר, השתמשנו

- בדרישה שמתקיים חוק שימור התנע בכל המהירויות,
- בדרישה ש- $f(v^2)=1$ בגבול הניוטוני,
- בכלל חיבור המהירויות היחסותי

כדי לקבל את התנע היחסותי,

$$\boxed{\vec{p} = \gamma m \vec{v}}$$

בשל הדרך שבה קיבלנו את התוצאה, נסיק שזהו התנע שנשמר בכל המהירויות וע"י כך מכליל את התנע הניוטוני.

שימו לב שהגענו להוכחה זו ע"י התנגשות מאוד מסוימת.

האם זה אומר שנוסחת התנע היחסותי שקיבלנו מתאימה רק להתנגשות זו ואינה כללית?

לא: יחידות הפתרון שמצאנו פירושה שאילו שימוש בהתנגשות אחרת היה מוביל לביטוי אחר עבור התנע, ביטוי זה לא היה מתאים עבור התנגשות זו.

התנגשות זו היתה מהווה דוגמה פרטית ששוללת את הביטוי, ולכן את נכונותו הכללית.

שימו לב שקיבלנו את אותו הביטוי לתנע היחסותי ע"י בחינת השינוי בתנע של גוף שפלט הבזק אור.

במקרה ההוא השתמשנו בתוצאות התורה האלקטרומגנטית שאומרת כי להבזק אור בעל אנרגיה E_L יש תנע $\frac{E_L}{c}$.

כעת מצאנו את התנע היחסותי שוב, אבל ע"י שיקולים יחסותיים בלבד, ללא שימוש באלקטרומגנטיות.

<u>אנרגיה קינטית יחסותית</u>

אנרגיה קינטית ותנע קשורים זה בזה.

לכן, כשם שהזדקקנו להגדרה חדשה לתנע, נזדקק להגדרה חדשה לאנרגיה הקינטית.

כדי למצוא הגדרה זו, נשים לב שבפיזיקה ניוטונית, **חוק שימור האנרגיה** פרושו כי **אנרגיה יכולה לעבור מצורה אחת לשנייה.**

ההכרה שאלה צורות שונות של אותו גודל נשמר הופכת את מושג האנרגיה למושג שימושי.

ניתן להגדיר משהו שנקרא "אנרגיה" ושלא מקיים כלל זה, אבל זה לא יהיה שימושי.

באופן ספציפי, **השינוי באנרגיה הקינטית של גוף שווה לעבודה הנעשית על הגוף.**

נדרוש שכלל זה מתקיים גם בפיזיקה יחסותית.

כלומר, נדרוש את חוק שימור האנרגיה, כאשר עבודה מוגדרת לפי הגדרתנו החדשה של החוק השני של ניוטון.

אם הגוף זז מרחק קטן $d\vec{r}$ תוך שפועל עליו כוח $\vec{F}$, אז השינוי באנרגיה הקינטית שלו הוא

$$dK = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot d\vec{r} = d\vec{p}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = d\vec{p}\cdot\vec{v}.$$

נשתמש בנוסחה שמצאנו עבור התנע היחסותי כדי לקבל את השינוי בתנע:

$$d\vec{p} = md\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right) = m\left[\frac{d\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{\vec{v}\,\frac{1}{2}d\left(v^2\right)}{\left(1-v^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

אז השינוי באנרגיה הקינטית הוא

$$dK = m\left[\frac{\vec{v}\cdot d\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{\frac{1}{2}v^2 d\left(v^2\right)}{\left(1-v^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

נשתמש בכך ש- $\vec{v}\cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}d\left(v^2\right)$ באיבר הראשון:

$$dK = m\left[\frac{\frac{1}{2}d\left(v^2\right)}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{\frac{1}{2}v^2 d\left(v^2\right)}{\left(1-v^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

נוציא החוצה את ה-$\frac{1}{2}d\left(v^2\right)$ וניקח מכנה משותף של שני האיברים:

$$dK = \frac{1}{2}md\left(v^2\right)\left[\frac{\left(1-v^2\right)+v^2}{\left(1-v^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$= \frac{\frac{1}{2}md\left(v^2\right)}{\left(1-v^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

זהו הדיפרנציאל של האנרגיה הקינטית.

כדי למצוא את האנרגיה הקינטית עצמה, נבצע אינטגרל על הדיפרנציאל הזה.

מאחר ש- dK נתון באמצעות $d(v^2)$, משתנה האינטגרציה הנוח הוא v^2.

אנו רוצים שיתקיים K=0 כאשר המהירות היא 0.

אז קבוע האינטגרציה הוא 0 כאשר את גבולות האינטגרל ניקח להיות 0 עד β^2. כלומר:

$$K=\int_0^{\beta^2}\frac{\frac{1}{2}m}{\left(1-v^2\right)^{\frac{3}{2}}}d\left(v^2\right)=\left.\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}\right|_0^{\beta^2}$$

$$=m\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}-1\right)=m(\gamma-1)$$

אם כן, האנרגיה הקינטית של הגוף היא

$$\boxed{K=m(\gamma-1)}$$

שימו לב לדמיון בין ביטוי זה לביטוי שנתן את הקשר בין מסה לאנרגיה:

מצאנו שכאשר גוף פולט אנרגיה (בדוגמה היתה זו אנרגיה של אור) E_L במערכת המנוחה שלו ונשאר במנוחה,

אז במערכת 'O שנעה במהירות β ביחס אליו,

האנרגיה הקינטית שלו קטנה ב- $\Delta K=E_L(\gamma-1)$.

מאחר שמהירותו ב-'O לא השתנתה, הסקנו שהמסה שלו קטנה ב- $\Delta m=E_L$.

כלומר, השינוי באנרגיה הקינטית שלו הוא $\Delta K=\Delta m(\gamma-1)$.

כעת אנו רואים שזה אכן מתאים לביטוי הכללי לאנרגיה קינטית, $K=m(\gamma-1)$.

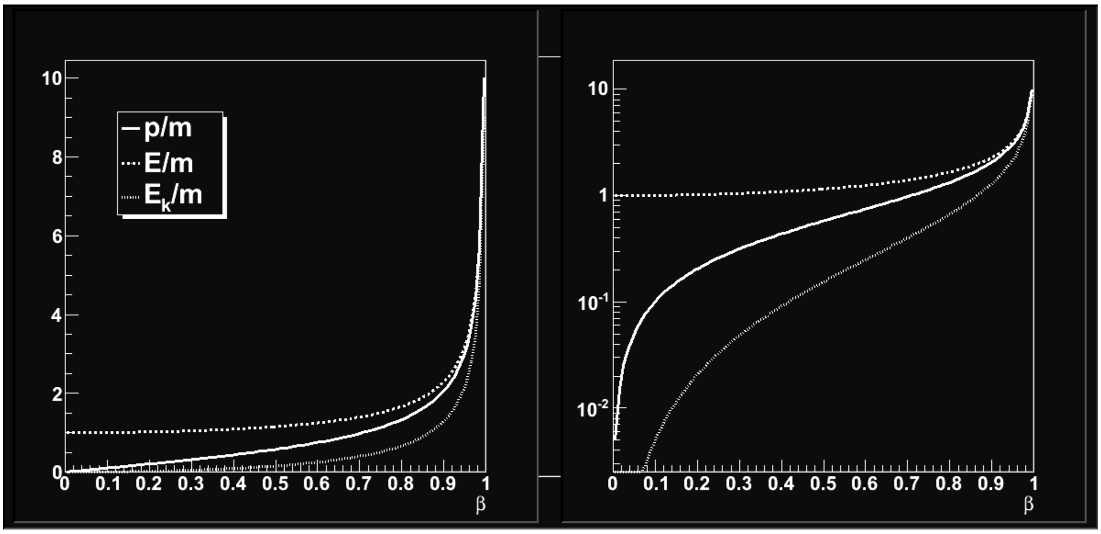
כפי שכבר ראינו, בקירוב הניוטוני מקבלים בחזרה את האנרגיה הקינטית המוכרת:

$$m(\gamma-1)\approx\frac{1}{2}m\beta^2.$$

<u>נסכם את שלמדנו על הגדלים המכניים היחסותיים:</u>

1. מסה:
   - הגדרנו מסה להיות תכונה של גוף, ולכן אינה תלויה במערכת – היא סקלר. מאחר שהיא סקלר, כל הצופים מסכימים על ערכה.
   - כדי למדוד את המסה של גוף, עוברים למערכת המנוחה שלו ומבצעים ניסויים ניוטוניים ($F=ma$ במהירות נמוכה, וכו').
   - מצאנו שניתן להפוך חלק מהמסה של גוף לאנרגיה, לפי $\Delta E = \Delta m$. סך כל האנרגיה שניתן "לחלוב" מהגוף בצורה זו הוא $E = m$.
   - מאחר שרק אנרגיה קינטית תלויה במהירות, אז m היא אנרגית המנוחה של הגוף: $E_{rest} = m$.
2. תנע: מצאנו שהתנע היחסותי הוא $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ (כאשר $\gamma = \gamma(v)$).
3. אנרגיה קינטית: מצאנו שהיא $K = m(\gamma - 1)$.
4. מ-1 ו-3 מקבלים שסך כל האנרגיה היא $E = E_{rest} + K = \gamma m$

הנה התנע $|\vec{p}|$, האנרגיה E, והאנרגיה הקינטית K של חלקיק במהירויות שונות ביחס למסתו:



<u>מדידה יחסותית של מסה</u>

כפי שאמרנו, ניתן למדוד את מסתו של גוף ע"י שימוש בפיזיקה ניוטונית, מתוך הקשר בין תאוצה לכוח, $F=ma$, כל זמן שמבצעים את הניסוי במהירות נמוכה.

נרחיב את זה למתכון יחסותי למדידת מסה, שניתן לישמו בכל מהירות:

נתון גוף שרוצים למדוד את מסתו.

נמדוד את העבודה שיש לבצע עליו כדי להעניק לו מהירות β.

עבודה זו שווה לאנרגיה הקינטית שלו, $K = m(\gamma - 1)$, כאשר $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

אז המסה נתונה ע"י $m = \dfrac{K}{\gamma - 1}$.

<u>המהירות המקסימלית</u>

מהביטוי $K = m\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$ לאנרגיה קינטית, ניתן לראות שככל שמהירות הגוף מתקרבת למהירות האור (1), דרושה יותר ויותר אנרגיה כדי להעניק לגוף את האנרגיה הקינטית הדרושה. בפרט,

דרושה אנרגיה אינסופית כדי להביא גוף למהירות האור.

עובדה זו מסבירה מדוע גוף אינו יכול לנוע במהירות האור, ומגנה על תורת היחסות מפני ה"בעיה" הכרוכה ב- $\beta = 1$, אותה הסקנו כאשר כתבנו לראשונה את התארכות הזמן.

<u>הגדרת איינשטיין (הפחות שימושית) למסה ולאנרגיה</u>

איינשטיין הגדיר את המסה בצורה שונה מהנהוג כיום.

הוא הגדיר מסה להיות $m = \gamma m_0$, כאשר m_0 נקראת מסת המנוחה של הגוף

(השוו להגדרה שלנו, בה $m = m_0$).

אז לפי הגדרת איינשטיין, האנרגיה הכללית היא תמיד (לא רק במנוחה) $E = mc^2$.

לפי הגדרה זו, גם המסה (לא רק האנרגיה) גדלה ומגיעה לגודל אינסופי עבור מהירות האור.

גישה זו נראית אולי טבעית לאור הוכחתו של איינשטיין את האקוויולנטיות בין אנרגיה למסה.
אך היא אינה שימושית ונוחה כמו הגישה בה נקטנו, ולכן אינה מקובלת כיום.

שימושי יותר להגדיר פרמטר מסה יחיד כתכונה סקלרית של הגוף במקום שני סוגי מסה,
ואז המסה היא סוג של אנרגיה – **בנוסף** לאנרגיה הקינטית של הגוף **ולא במקומה**.
כך, מסה משתלבת בתכונה החשובה ביותר של אנרגיה – שימורה תוך מעבר בין צורות שונות.

שימו לב שגם בפיזיקה ניוטונית יש חופש הגדרה מסוג זה.
גם שם יכולנו לקבוע את הקשר בין אנרגיה קינטית ומסה באמצעות ההגדרה $E=mX$,
כאשר X הוא קבוע כלשהו עם ממדים של ריבוע מהירות,
והמסה m של הגוף גדלה עם מהירותו לפי $m = m_0(v/c)^2$.
ניכר בעליל שאין בניסוח זה תועלת.