

תרגיל 6 – פולינום טיילור וקיצון מקומי

1. מצאו את פולינום טיילור מסדר 3 של הפונקציות הבאות

א. $\sqrt{4x^2 + y^2}$ סביב הנקודה $(0,1)$

ב. $e^x \cos(2x)$ סביב הנקודה $(0,0)$

2. תהי $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ נקודה, ותהי $U \subseteq \mathbb{R}^2$ סביבה פתוחה כך ש $(a,b) \in U$.

תהי פונקציה $f(x,y) \in C^2(U)$ (כל הנגזרות עד וכולל סדר 2 קיימות ורציפות בכל נקודה בסביבה).

נניח בנוסף כי לכל נקודה ב U מתקיים כי $f_{xx} = f_{xy} = f_{yy}$.

כעת נניח כי $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ וכי $f_{xx}(a,b) = 1$.

הוכיחו כי (a,b) הינה נקודת מינימום מקומי של f (רמז: טיילור עם שארית לגראנז').

3. מצאו ומיינו את הנקודות הקריטיות של הפונקציות הבאות (מינימום מקומי, מקסימום מקומי או אוקף):

א. $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 6y^2$

ב. $f(x,y) = (x-1)^2 - 3y^2$

ג. $f(x,y) = x + x \ln(2y)$

ד. $f(x,y) = x^2 y^4$

ה. $f(x,y) = y^4 - 6y^2 + 12xy + x^4 - 6x^2$

ו. $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

4. תהי פונקציה $f(x,y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ (כל הנגזרות עד וכולל סדר 2 קיימות ורציפות בכל נקודה במישור).

נתון כי פולינום טיילור של f מסדר 2 סביב הנקודה $(5,3)$ הינו

$$p(x,y) = -80 + 32x - 5x^2 - 6y + 6xy - 4y^2$$

הוכיחו כי $(5,3)$ נקודה קריטית ומצאו את סוגה.

5. מצאו ומיינו את הנקודות הקריטיות של הפונקציה $f(x,y) = 4xe^y - x^4 - e^{4x}$.

אם מצאתם נק' קיצון מקומי, קבעו האם זו גם נק' קיצון גלובאלי.