

## תרגיל בית 12 בתורת החבורות 88-218 סמסטר א' תשפ"ב

**שאלה 1** (חימום). מצאו את הסדרים של כל תת-חבורות סילו של  $S_5$ . מי מהן אבליות?

**שאלה 2** (חימום). מצאו את כל החבורות האבליות מסדר 12 עד כדי איזומורפיזם.

**שאלה 3**. יהי  $p$  ראשוני.

א. (חימום) תהי  $P \leq S_p$  תת-חבורת  $p$ -סילו. הוכיחו כי  $P$  אבליה.

ב. תהי  $P \leq S_{p^2}$  תת-חבורת  $p$ -סילו. הוכיחו שיש לה תת-חבורה אבליה  $H \leq P$  שהיא מסדר  $p^p$ .

ג. (קשה) עבור תת-החבורה  $H$  מהסעיף הקודם, הוכיחו שכל תמורה  $\sigma \in S_{p^2}$  שאינה שייכת ל- $H$  לא מתחלפת עם כל איברי  $H$ . בפרט, תת-החבורה  $P \leq S_{p^2}$  לא אבליה.

**שאלה 4**. יהיו  $p \leq q$  ראשוניים (לאו דווקא שונים).

א. הוכיחו שכל חבורה מסדר  $pq^n$  עבור  $n \in \mathbb{N}$  אינה פשוטה.

ב. הוכיחו שגם חבורות מסדר 56 או 63 הן לא פשוטות. זה שונה מהסעיף הקודם.

ג. (רשות מאוד קשה!) תהי חבורה  $G$  מסדר  $p^a q^b$  עבור  $a, b \in \mathbb{N}$ . הוכיחו כי  $G$  אינה פשוטה לכמה שיותר זוגות אפשריים  $(a, b)$  שאתם מצליחים, שלא טיפלנו בהם עד כה בכיתה או בתרגיל.

רמז: התשובה היא לכל  $a, b$ . הוכחה לכך דורשת בדרך כלל כמה קורסים.

**שאלה 5**. תהי  $G$  חבורה סופית, ונניח כי מספר ראשוני  $p$  מחלק את  $|G|$ . הוכיחו שקיים  $z \in G$  מסדר  $p$  כך ש- $C_G(z)$  מכיל תת-חבורת  $p$ -סילו של  $G$ . רמז: לתת-חבורת  $p$ -סילו יש מרכז.

**שאלה 6**. תהי חבורה  $G$  מסדר  $p^t m$ , כאשר  $p$  ראשוני,  $m > 1$  טבעי שזר ל- $p$  ו- $t \in \mathbb{N}$ .

א. נניח ש- $|G|$  לא מחלק את  $m!$  (ניתן להסתפק בכך ש- $|G|$  לא מחלק את  $(n_p)!$ ). הוכיחו כי  $G$  לא פשוטה. רמז: העידון של משפט קיילי.

ב. הוכיחו שחבורות מסדרים 36, 150 או 160 אינן פשוטות.

**שאלה 7**. נתונות שש חבורות מסדר 54. זהו ונמקו אילו חבורות איזומורפיות זו לזו:

$$U_7 \times \mathbb{Z}_9, \quad \mathbb{Z}_{27} \times \mathbb{Z}_2, \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times U_{18}, \quad \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9, \quad \mathbb{Z}_{54}$$

נסו למצוא איזומורפיזמים מפורשים בין חלק מהחבורות.

**שאלה 8**

א. מצאו כמה חבורות אבליות יש מסדר  $6!$ , עד כדי איזומורפיזם.

ב. לכמה מהחבורות האבליות מסדר  $6!$  יש תת-חבורה 3-סילו ציקלית?

## שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

**שאלה 9.** תהי  $G$  חבורה מסדר  $n$ . הוכיחו כי השיכון  $G \rightarrow S_n$  ממשפט קיילי אינו שיכון לתוך  $A_n$  אם ורק אם תת-חבורה 2-סילו של  $G$  היא ציקלית לא טריוויאלית. רמז: העזרו בשאלה מתרגיל בית קודם.

**שאלה 10.** הוכיחו שאם לשתי חבורות אבליות סופיות יש את אותו מספר איברים מכל סדר, אז הן איזומורפיות.

רמז: למעשה צריך להראות שמספר האיברים מכל סדר קובע באופן יחיד חבורה אבלית סופית. התבוננו בצורה הקנונית של חבורה אבלית, או העזרו בתת-חבורות סילו שלה.

בהצלחה!