פתרון בוחן

שאלה 1. א.

נמצא את אוסף הפתרונות ונשתמש במשתנים תלויים וחופשיים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 1.5 & 0 \end{pmatrix}$$

ונקבל:
$$\left\{ \begin{pmatrix} 0.5t \\ -1.5t \\ t \\ s \end{pmatrix} \ : \ s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0.5t \\ -1.5t \\ t \\ s \end{pmatrix} \ : \ s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t\begin{pmatrix} 0.5 \\ -1.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ s,t \in \mathbb{R} \right\} = span\left\{ \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

סעיף ב:

נמצא וקטור כללי בספאן
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overset{?}{\in} span(S) \iff$$

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 3 & 0 & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 3 & 0 & d \\ 1 & 2 & 1 & a \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 3 & 1 & d-b \\ 0 & 2 & 2 & a-b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & -2 & d-b-3c \\ 0 & 0 & 0 & a-b-2c \end{array}\right)$$

ולכן יש פתרון אמ"מ $a-b-2c=0$ ולכן:

$$span(S) = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid a-b-2c=0 \}$$

שאלה2: א.

- **$U \neq \emptyset$:**
ובפרט פולינום האפס ממעלה 2 (איבר האפס של $V = R_2[x]$) מקיים
$0 = \tilde{p}(x) = x \cdot \tilde{p}'(x) = x \cdot 0 = 0$, כלומר $0_V = \tilde{p}(x) \in U$.

- **סגירות לחיבור ב - U :**
נראה כי עבור $p_1(x), p_2(x) \in U$ מתקיים $(p_1(x) + p_2(x)) \in U$.

$$p_1(x) + p_2(x) = \begin{Bmatrix} p_1(x) \in U \Rightarrow p_1(x) = xp_1'(x) \\ p_2(x) \in U \Rightarrow p_2(x) = xp_2'(x) \end{Bmatrix} = xp_1'(x) + xp_2'(x) = x(p_1'(x) + p_2'(x)) =$$
$$= \{\text{תכונות} \quad \text{הנגזרת}\} = x(p_1(x) + p_2(x))' \Rightarrow (p_1(x) + p_2(x)) \in U$$

- **סגירות לכפל בסקלר :**
נראה כי עבור $p(x) \in U$ ו- $\alpha \in R$ מתקיים $(\alpha \cdot p(x)) \in U$.

$$\alpha \cdot p(x) = \{p(x) \in U \Rightarrow p(x) = xp'(x)\} = \alpha \cdot (xp'(x)) = x(\alpha \cdot p'(x)) =$$
$$= \{\text{תכונות} \quad \text{הנגזרת}\} = x(\alpha \cdot p(x))' \Rightarrow (\alpha \cdot p(x)) \in U$$

ב.

נראה כי v אינו צירוף לינארי של u, w. נניח בשלילה כי v אכן צירוף לינארי של u, w, כלומר קיימים סקלרים $\alpha, \beta \in F$ עבורם

$$v = \alpha u + \beta w \tag{20}$$

נקבל כי $\alpha \neq 0$ שכן נתון כי v אינו כפל בסקלר של w. מכאן

$$\alpha u = \underbrace{v}_{\in W} - \underbrace{\beta w}_{\in W} \in W \tag{21}$$

שכן $v \in W$ ו-$-\beta w \in W$ שכן תת מרחב וקטורי סגור לכפל בסקלר. אם כן, כיוון שתת מרחב וקטורי גם סגור לחיבור וקטורים, נקבל כי $\alpha u \in W$. אם כן, $\alpha \neq 0$ ונקבל

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right) \alpha u = u \in W \tag{22}$$

שכן W סגור לכפל בסקלר, בסתירה לכך ש-$u \notin W$.

שאלה 3:

(א) יהיו α,β,γ כך ש-

$$\alpha v_1+\beta\left(v_1+v_2\right)+\gamma\left(v_1+v_2+v_3\right)=0$$

לכן

$$\left(\alpha+\beta+\gamma\right)v_1+\left(\beta+\gamma\right)v_2+\gamma v_3=0$$

נשים לב ש-v_1,v_2,v_3 לכן הצ"ל הטריוואלי הוא היחידי שמספק לנו את ווקטור ה-0 מכאן

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma & = & 0\\ \beta+\gamma & = & 0\\ \gamma & = & 0\end{cases}$$

כלומר נקבל ש-$\alpha=\beta=\gamma=0$ לכן הקבוצה B_1 בת"ל.

(ב) יהיו α,β,γ כך ש-

$$\alpha\left(v_1+v_2\right)+\beta\left(v_2+v_3\right)+\gamma\left(v_1-v_3\right)=0$$

לכן

$$\left(\alpha+\gamma\right)v_1+\left(\alpha+\beta\right)v_2+\left(\beta-\gamma\right)v_3=0$$

נשים לב ש-v_1,v_2,v_3 לכן הצ"ל הטריוואלי הוא היחידי שמספק לנו את ווקטור ה-0 מכאן

$$\begin{cases}\alpha+\gamma & = & 0\\ \alpha+\beta & = & 0\\ \beta-\gamma & = & 0\end{cases}$$

כנקבל ש-$\alpha=-1,\beta=\gamma=1$ פותר את המערכת,

$$-1\left(v_1+v_2\right)+1\left(v_2+v_3\right)+1\left(v_1-v_3\right)=0$$

כלומר יש צ"ל לא טריוואלי שנותן את ווקטור ה-0 ולכן הקבוצה B_2היא ת"ל