אלגברה לינארית, תשע"ו - תרגיל 6 פתור

1. האם התתי־קבוצות של המרחבים הוקטורים המצויינים הן תתי־מרחבים? אם כן־ הוכיחו. אם לא־ נמקו או תנו דוגמא נגדית.

(א) $\left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

זהו ת"מ וקטורי.

סגירות לחיבור: $\begin{pmatrix} a+b \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'+b' \\ b' \\ a' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+a')+(b+b') \\ b+b' \\ a+a' \\ 0 \end{pmatrix}$

סגירות לכפל בסקלר: $c \cdot \begin{pmatrix} a+b \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca+cb \\ cb \\ ca \\ 0 \end{pmatrix}$

(ב) $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a+b+c=0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

זהו ת"מ וקטורי.

סגירות לחיבור: נקח שני וקטורים $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \in V$, מכיוון שהם ב$V$ אז $a+b+c=0$ וגם $a'+b'+c'=0$. מתקיים ש $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix} \in V$ כי סכום האיברים הוא $(a+b+c)+(a'+b'+c')=0+0=0$.

סגירות לכפל בסקלר: ניקח $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in V$ כלומר ש $a+b+c=0$. ונקח סקלר k. אזי: $k \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{pmatrix} \in V$ כי סכום האיברים הוא $ka+kb+kc =$

.$k(a+b+c)=0$

(ג) $\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a \geq 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

זהו לא ת"מ וקטורי! שימו לב שהוא כן סגור לחיבור, אבל הוא לא סגור לכפל בסקלר שכן למשל $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$ אבל $(-1)\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin V$.

$\left\{\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

זהו ת"מ וקטורי.

סגירות לחיבור:

$$\left(\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) + \left(\alpha'\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = (\alpha+\alpha')\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (\beta+\beta')\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in V.$$

סגירות לכפל בסקלר:

$$k\left(\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = (k\alpha)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (k\beta)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in V.$$

2. יהי $V = \mathbb{F}^{n\times n}$ מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. (פעולות רגילות של חיבור מטריצות וכפל בסקלר). הוכיחו כי הקבוצות הבאות הם תתי מרחבים של V:
א. מטריצות סימטריות.
ב. מטריצות אלכסוניות.
ג. מטריצות משולשית עליונה.

פתרון:

נבדוק את התנאים לתת מרחב עבור כל אחת מהקבוצות (נשתמש בקריטריון המקוצר):
א. מטריצת האפס היא סימטרית ולכן 0 בתת המרחב. יהי A, B מטריצות סימטריות ו־$\alpha \in \mathbb{F}$ נוכיח כי $\alpha A + B$ סימטרית, $(\alpha A+B)_{ij} = \alpha\,(A)_{ij} + (B)_{ij} = \alpha\,(A)_{ji} + (B)_{ji} = (\alpha A+B)_{ji}$ ולכן $(\alpha A+B)$ גם כן סימטרית ונמצאת בתת מרחב.
ב. מטריצת האפס היא אלכסונית ולכן נמצאת בתת מרחב. יהיו A, B מטריצות סימטריות $\alpha \in \mathbb{F}$ נוכיח כי $\alpha A + B$ אלכסונית, $(\alpha A+B)_{ij} = \alpha\,(A)_{ij} + (B)_{ij}$ ולכן $(\alpha A+B)_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow i=j$ ולכן $(\alpha A+B)$ אלכסונית.
ג. מטריצת האפס היא אלכסונית ולכן נמצאת בתת מרחב. יהיו A, B מטריצות משולשית עליונה $\alpha \in \mathbb{F}$ נוכיח כי $\alpha A + B$ משולשית עליונה, $(\alpha A+B)_{ij} = \alpha\,(A)_{ij} + (B)_{ij}$ ולכן $(\alpha A+B)_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow i < j$ ולכן $(\alpha A+B)$ משולשית

עליונה.

3. קבעו אם הקבוצות הבאות ת"ל או בת"ל:

א. $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ ב. $\left\{\begin{pmatrix}5\\6\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}\right\}$ ג. $\left\{\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}\right\}$

פתרון:

עבור כל אחת מהקבוצות נבדוק האם קיים פתרון לא טרויאלי למשוואה $a\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+$ $b\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=0$ נעבור למערכת המטריצאלית המתאימה $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=$ 0 ונבדוק ע"י דרוג מטריצות אם קיים פתרון לא טריוויאלי.

א. המטריצה המתאימה (אם נסדר את הוקטורים בקבוצה בסדר מעט שונה): $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ וכמובן שקיים רק פתרון טרויאלי. ולכן הקבוצה היא בת"ל.

ב. המטריצה המתאימה: $\begin{pmatrix}3&2&5\\4&2&6\\1&0&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}3&2&5\\4&2&6\\1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\4&2&6\\3&2&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

יש שורת אפסים ולכן קיימים אינסוף פתרונות ובפרט קיים פתרון לא טריויאלי. ולכן הקבוצה היא ת"ל.

ג. המטריצה המתאימה: $\begin{pmatrix}2&0&0\\4&2&4\\1&1&2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\4&2&4\\1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\4&2&4\\2&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-2&-4\\0&-2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-2&-4\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

יש שורת אפסים ולכן קיימים אינסוף פתרונות ובפרט קיים פתרון לא טריויאלי. ולכן הקבוצה היא ת"ל.

דוגמה לפתרון הוא $c=t, b=-2t, a=0$ והצרוף יראה כך:

$$0\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}+-2t\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}=0$$