פתרון תרגיל 12 – טופולוגיה 2014

שאלה 1

א. נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$: $x_1+y_1^2=x_2+y_2^2 \Leftrightarrow (x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$. הוכיחו כי $\mathbb{R}^2/\sim$ הומיאומורפי ל- $\mathbb{R}$.

רמז: מצאו את ההעתקה ההפוכה ל - $\hat{f}$ מ- $\mathbb{R}$ ל - $\mathbb{R}^2/\sim$.

ב. נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$: $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2 \Leftrightarrow (x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$. למה הומיאומורפי $\mathbb{R}^2/\sim$?

פתרון

א. נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ על-ידי $f(x,y)=x+y^2$. מתקיים

$(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)\Leftrightarrow f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$,

לכן $\hat{f}:\mathbb{R}^2/\sim\to\mathbb{R}$ המוגדרת על-ידי $\hat{f}[(x,y)]=f(x,y)$ היא חח"ע; ומכיוון ש- f רציפה כך גם $\hat{f}$.

נראה ש- $\left(\hat{f}\right)^{-1}$ רציפה:

תהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2/\sim$ מוגדרת על-ידי $g(x)=[(x,0)]$ אזי $g=\rho\circ h$ באשר

$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ h(x)=(x,0)$ ולכן g רציפה כהרכבת רציפות (שימו לב ש- h רציפה כפונקציה לתוך מרחב מכפלה, אשר רציפה רכיב רכיב. בנוסף, שימו לב שהטופולוגיה האוקלידית על $\mathbb{R}^2$ מתלכדת עם טופולוגיית המכפלה).

נותר להוכיח כי $g=\left(\hat{f}\right)^{-1}$.

$g\circ\hat{f}[(x,y)]=g(x+y^2)=[(x+y^2,0)]=[(x,y)]$ לכן ההרכבה $g\circ\hat{f}$ היא הזהות ($id_{\mathbb{R}^2/\sim}$). ניתן להראות שההרכבה בכיוון השני נותנת גם היא את פונקציית הזהות ($id_{\mathbb{R}}$).

מכאן $g=\left(\hat{f}\right)^{-1}$ רציפה וקיבלנו בסה"כ ש- $\mathbb{R}^2/\sim$ הומיאומורפי ל- $\mathbb{R}$.

ב. נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to[0,\infty)$ על-ידי $f(x,y)=x^2+y^2$. (שימו לב ש- f על $[0,\infty)$).

בדיוק כמו בסעיף א' מסיקים ש- $\hat{f}$ חח"ע ורציפה וגם כאן אם נגדיר $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}^2/\sim$ על-ידי $g(x)=\left[\left(\sqrt{x},0\right)\right]$ בדומה לסעיף א' ניתן לבדוק ולראות ש- $g=\left(\hat{f}\right)^{-1}$ (בדקו הרכבה בשני הכיוונים ותקבלו את פונקציות זהות). כעת מספיק להוכיח ש- g רציפה. ואמנם $g=\rho\circ t\circ r$ באשר $\begin{cases} r:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ r(x)=\sqrt{x} \\ t:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2, t(x)=(x,0)\end{cases}$ ולכן g רציפה כהרכבת רציפות וקיבלנו בסה"כ ש- $\mathbb{R}^2/\sim\ \cong[0,\infty)$.

שאלה 2

יהי X מרחב המנה של $\mathbb{R}$ המתקבל מיחס השקילות הבא:

$x\sim y \Leftrightarrow (x=y)\vee(x=-y)$. הראו ש- X הומיאומורפי ל-$[0,\infty)$.

פתרון

המועמד הטבעי $f(x)=|x|$.

מתקיים $x\sim y \Leftrightarrow (x=y)\vee(x=-y)\Leftrightarrow |x|=|y|\Leftrightarrow f(x)=f(y)$ ולכן $\hat{f}$ חח"ע.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "f=\hat{f}\circ\rho"] \arrow[dr, "\rho"'] & & {[0,\infty)} \\ & \mathbb{R}/\sim \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

f רציפה ולכן $\hat{f}$ רציפה.

נמצא את הפונקציה ההופכית של $\hat{f}$. נגדיר: $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}/\sim$ על-ידי: $g(x)=[x]$.

לכל $x\in[0,\infty)$ מתקיים: $\hat{f}\circ g(x)=\hat{f}([x])=f(x)=|x|\underset{x\geq 0}{=}x$.

מצד שני, לכל $[x]\in \mathbb{R}/_\sim$ מתקיים $g\circ \hat{f}([x])=g(f(x))=g(|x|)=[|x|]\underset{x\sim|x|}{=}[x]$.

לכן g היא הפונקיצה ההופכית של $\hat{f}$. קל לראות ש- $g=\rho|_{[0,\infty)}$ ומכיון ש- ρ רציפה אז גם g .

בסה"כ $\hat{f}$ רציפה, הפיכה ו- $\left(\hat{f}\right)^{-1}$ רציפה ולכן $\hat{f}$ הומיאומורפיזם.

<u>דרך אחרת</u>: ניתן להראות ש- f היא העתקה פתוחה (תמונה של קטע פתוח היא קבוצה פתוחה) ולכן מנה (שכן היא רציפה ועל) ולכן $\hat{f}$ מנה (שכן היא חח"ע).

<u>שאלה 3</u>

יהי X מרחב המנה של $\mathbb{R}$ המתקבל על-ידי זה שמזהים זו לזו את כל הנקודות $x\in\mathbb{R}$ כך ש- $|x|\geq 1$. בלשון אחרת, X הוא מרחב המנה $\mathbb{R}/_\sim$ כאשר $\sim$ הוא יחס שקילות המוגדר באופן הבא: $x\sim y$ אם ורק אם $x=y$ או $|x|\geq 1$ וגם $|y|\geq 1$. הראו ש- X הומיאומורפי למעגל $S^1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}$.

<u>פתרון</u>

תזכורת: הקטע $[0,1]$ כשמזהים בו את הנקודות $0,1$ הומיאומורפי ל- S^1 .

נגדיר פונקציה $f:\mathbb{R}\to S^1$ המכבדת את יחס השקילות.

כל הנקודות מחוץ ל- $(-1,1)$ עוברות לאותה נקודה במנה, ולכן נעתיק את $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ לאותה נקודה אליה נשלחות $-1,1$.

אנחנו יודעים איך להעתיק את $[0,1]$ ל- S^1 ולכן נעתיק את $[-1,1]$ ל- $[0,1]$ הומיאומורפית על-ידי הפונקציה הטבעית $h:[-1,1]\to[0,1]$ המוגדרת על-ידי

$h(x)=\dfrac{x+1}{2}$ (שימו לב ש-$h(-1)=0\,;\,h(1)=1$). לאחר מכן נרכיב אותה עם

הפונקציה הידועה $g:[0,1]\to S^1$ המוגדרת על-ידי $g(x)=(\cos 2\pi x,\sin 2\pi x)$

(שימו לב שהנקודות $0,1\in[0,1]$ עוברות תחת g לנקודה $(1,0)\in S^1$). לכן,

$g(h(1))=g(h(-1))=(1,0)\in S^1$.

כעת $f:\mathbb{R}\to S^1$ מוגדרת באופן הבא:

$$f(x):=\begin{cases} g(h(x)) & |x|\le 1 \\ (1,0) & |x|\ge 1\end{cases}.$$

<u>תת-טענה</u>: f רציפה.

<u>תת-הוכחה</u>: נשתמש במשפט שראינו בכיתה: X,Y מ"ט, ויהי $C_1,...,C_n$ כיסוי סגור של X, כלומר C_i סגורה עבור $1\le i\le n$, ומתקיים $X=\bigcup_{i=1}^{n}C_i$. אם $f:X\to Y$ פונקציה כך ש- $f|_{C_i}$ רציפה לכל $1\le i\le n$, אזי f רציפה.

במקרה שלנו, מתקיים $\mathbb{R}=\{x\in\mathbb{R}:|x|\ge 1\}\cup\{x\in\mathbb{R}:|x|\le 1\}$ וכן $\{x\in\mathbb{R}:|x|\le 1\}=[-1,1]\ ;\ \{x\in\mathbb{R}:|x|\ge 1\}=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ ומכאן הן סגורות המקיימות את תנאי המשפט, ולכן f רציפה.

מש"ל תת-טענה.

<u>סיכום ביניים:</u>

- $f:\mathbb{R}\to S^1$ רציפה ועל;
- מתקיים $x\sim y$ אם ורק אם $f(x)=f(y)$

  ולכן $\hat{f}:\mathbb{R}/\sim\ \to S^1$ חח"ע;

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & S^1 \\ \rho\searrow & & \nearrow\hat{f} \\ & \mathbb{R}/\sim & \end{array}$$

- f רציפה $\Leftarrow$ $\hat{f}$ רציפה;
- f על $\Leftarrow$ $\hat{f}$ על.

נוכיח כעת ש- ${\mathbb{R}}/{\sim}$ הוא מרחב קומפקטי: נשים לב שצמצום העתקת המנה $\rho|_{[-1,1]}:[-1,1]\to {\mathbb{R}}/{\sim}$ היא העתקה רציפה ו**על** ממרחב קומפקטי, ולכן גם התמונה ${\mathbb{R}}/{\sim}$ היא מרחב קומפקטי.

כעת $\hat{f}$ רציפה מקומפקטי להאוסדורף, ולכן היא העתקה סגורה.

כלומר $\hat{f}$ רציפה, סגורה, חח"ע ו**על**, ולכן היא הומיאומורפיזם.

<u>שאלה 4</u>

מצאו דוגמה להעתקת מנה שאינה פתוחה ואינה סגורה.

<u>פתרון</u>

בתרגול האחרון פתרנו את התרגיל הבא:

נתבונן במרחב שרפינסקי (Sierpinsky). זהו המרחב $X=\{0,1\}$ עם הטופולוגיה $\tau=\{\varnothing, X,\{0\}\}$.

א. הוכיחו שמרחב שרפינסקי אינו מטריזבילי.

ב. יהי $I=[0,1]$ ותהי $f:I\to\{0,1\}$ מוגדרת על-ידי $f(x)=\begin{cases}0 & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right) \\ 1 & x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$.

נגדיר יחס שקילות על I באופן הבא: $a\sim b \Leftrightarrow f(a)=f(b)$ הוכיחו כי ${I}/{\sim}$ הומיאמורפי למרחב שרפינסקי.

הפונקציה f היא פונקציית מנה ונראה כעת שהיא אינה פתוחה ואינה סגורה.

אינה פתוחה: $\left(\frac{3}{4},1\right]$ פתוחה ב- I וגם $f\left(\left(\frac{3}{4},1\right]\right)=\{1\}\notin\tau$.

אינה סגורה: $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ סגורה ב- I וגם $f\left(\left[0,\frac{1}{3}\right]\right)=\{0\}$ אינה סגורה ב-(X,τ).

<u>שאלה 5</u>

נתבונן ב- $\mathbb{R}$ ובתת-קבוצה שלו $S=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$. נאמר ש- $C\subseteq\mathbb{R}$ היא קבוצה סגורה אם $C=A\bigcup T$ כאשר: A היא תת-קבוצה סגורה של $\mathbb{R}$ <u>בטופולוגיה האוקלידית</u>, ו- T היא תת-קבוצה כלשהי של S. הוכחתם בתרגיל בית 5 שהמשלימים של הקבוצות הסגורות הללו יוצרים טופולוגיה על $\mathbb{R}$. נסמן את הטופולוגיה הזאת ב- τ.

א. נאפיין את הקבוצות הפתוחות: הוכיחו כי $O\in\tau$ אמ"מ $O=B\bigcap T$ כאשר B היא תת-קבוצה פתוחה של $\mathbb{R}$ <u>בטופולוגיה האוקלידית</u> ו- $S^C\subseteq T$.

ב. הוכיחו כי τ מכילה את הטופולוגיה האוקלידית והסיקו ש-$(\mathbb{R},\tau)$ הוא T_2.

ג. הראו שאם $O\in\tau$ כך ש- $S\subseteq O$ אזי O פתוחה <u>בטופולוגיה האוקלידית</u>.

ד. הוכיחו שלא קיימות $U,V\in\tau$ זרות כך ש- $S\subseteq U$, $0\in V$ והסיקו ש-$(\mathbb{R},\tau)$ אינו T_3.

<u>פתרון</u>

א. $O\in\tau$ אמ"מ O^C סגורה אמ"מ $O^C=A\bigcup F$ כאשר: A היא תת-קבוצה סגורה של $\mathbb{R}$ בטופולוגיה האוקלידית ו- F היא תת-קבוצה כלשהי של S. זה מתקיים אמ"מ $O=A^C\bigcap F^C$ עבור A,F הנ"ל. נציב $B=A^C, T=F^C$. קל לראות ש- B פתוחה באוקלידית ו- $S^C\subseteq T$.

ב. תהי O קבוצה פתוחה בטופולוגיה האוקלידית, אזי ניתן להציגה כ- $O=O\bigcap\mathbb{R}$ כאשר $\mathbb{R}^C\subseteq T$ ולכן על-פי סעיף א', $O\in\tau$.

הטופולוגיה האוקלידית היא מטריזבילית ולכן T_2 ולכן כל טופולוגיה שתכיל אותה גם תהיה T_2 (מדוע?).

ג. על-פי סעיף א', $O=B\bigcap T$ כאשר B היא תת-קבוצה פתוחה של $\mathbb{R}$ בטופולוגיה האוקלידית ו- $S^C\subseteq T$. מהנתון $S\subseteq O$ וכמו כן $O\subseteq T$ ולכן $S\subseteq T$ ומכאן $\mathbb{R}=S\bigcup S^C\subseteq T$ ולכן $\mathbb{R}=T$ ו- $O=B\bigcap T=B$.

ד. נניח בשלילה שקיימות $U,V\in\tau$ זרות כך ש- $S\subseteq U$, $0\in V$. על-פי ג' U פתוחה בטופולולגיה האוקלידית, על-פי סעיף א' $V=B\bigcap T$ כאשר B היא תת-קבוצה פתוחה של $\mathbb{R}$ בטופולוגיה האוקלידית ו- $S^C\subseteq T$. כעת, $0\in B$ שפתוחה בטופולוגיה האוקלידית שבה מתקיים $\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$. מכאן נובע כי $S\bigcap B\neq\varnothing$ (מדוע?) ולכן גם $U\bigcap B\neq\varnothing$. מתקיים $U\bigcap B\neq\varnothing$ וכן $U\bigcap B$ פתוחה באוקלידית ולכן בהכרח $|U\bigcap B|>\aleph_0$. מכיוון ש- $|S|=\aleph_0$ נסיק ש- $(U\bigcap B)\bigcap S^C\neq\varnothing$ (אכן, שימו לב שמתקיים $U\bigcap B=((U\bigcap B)\bigcap S)\bigcup((U\bigcap B)\bigcap S^C)$). לכן $\varnothing\neq(U\bigcap B)\bigcap S^C\subseteq(U\bigcap B)\bigcap T=U\bigcap V$ בסתירה לכך ש- U,V זרות.

על מנת להסיק ש- $(\mathbb{R},\tau)$ אינו T_3 שימו לב ש- $S=\varnothing\bigcup S$ סגורה ב- $(\mathbb{R},\tau)$.

בהצלחה בבחינה!