מד"ר - הרצאה 6

21 באוגוסט 2011

משוואת בסל

$$x^2y^{''}+xy^{'}+\left(x^2-m^2\right)y=0$$

כאשר נניח ב.ה.כ $m\geq 0$.

$$\begin{aligned}y^{''}+\frac{1}{x}y^{'}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)y &= 0\\ \lim_{x\to 0}\left(x\cdot\frac{1}{x}\right) &= 1\\ \lim_{x\to 0}\left(x^2\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)\right) &= -m^2\end{aligned}$$

נעביר למשוואת אוילר המתאימה:

$$x^2y^{''}+1\cdot xy^{'}-m^2y=0$$

ננחש פתרון

$$\begin{aligned}y &= x^r\\ y^{'} &= rx^{r-1}\\ y^{''} &= r\left(r-1\right)x^{r-2}\end{aligned}$$

נציב ונקבל את המשוואה האינדיציאלית:

$$\begin{aligned}r\left(r-1\right)+r-m^2 &= 0\\ r^2 &= m^2\\ r &= \pm m\end{aligned}$$

נבדוק מקרים. אם:

$$r_1-r_2=2m\notin\mathbb{Z}$$

אז הפתרון:

$$y=c_1x^m\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+c_2x^{-m}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

נציב את הטור הראשון במשוואה:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n} \\ y^{'} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(m+n\right) x^{m+n-1} \\ y^{''} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(m+n\right) \left(m+n-1\right) x^{m+n-2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(m+n\right) \left(m+n-1\right) x^{m+n} &+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(m+n\right) x^{m+n} - \sum_{n=0}^{\infty} m^2 a_n x^{m+n} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n+2} = 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(m+n\right) \left(m+n-1\right) x^{m+n} &+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(m+n\right) x^{m+n} - \sum_{n=0}^{\infty} m^2 a_n x^{m+n} \\ &+ \sum_{\ell=2}^{\infty} a_{\ell-2} x^{m+\ell} = 0 \end{aligned}$$

נשווה מקדמים:

$$\begin{aligned} a_n \left[\left(m+n\right)\left(m+n-1\right) + m + n - m^2\right] &= - \quad a_{n-2} \\ a_n &= \frac{-a_{n-2}}{n\left(n-2m\right)} \end{aligned}$$

אם נסתכל על $n=1$ נקבל

$$a_1 = 0$$

ולכן כל המקדמים האי-זוגיים מתאפסים, ועבור האיברים הזוגיים נקבל:

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2k\left(2k-2m\right)}$$

נפתור את נוסחת הרקורסיה ונקבל:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^n \frac{a_0}{2^{2n} n! \left(m+1\right)\left(m+2\right) ... \left(m+n\right)} x^{2n+m}$$

אם

$$r_1 - r_2 = 2m \in \mathbb{Z}$$

אז הפתרון הוא:

$$y = c_1 x^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + c_2 x^m \ln x \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

הגדרה

$$\Gamma\left(\alpha\right)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

עבור $\alpha>0$.

$$\int x^{\alpha-1}e^{-x}dx=-x^{\alpha-1}e^{-x}|_0^\infty+\left(\alpha-1\right)\int_0^\infty x^{\alpha-2}e^{-x}dx=\left(\alpha-1\right)\Gamma\left(\alpha-1\right)$$

אזי נשים לב שעבור $n\in\mathbb{N}$ נקבל:

$$\Gamma\left(n\right)=\left(n-1\right)!$$

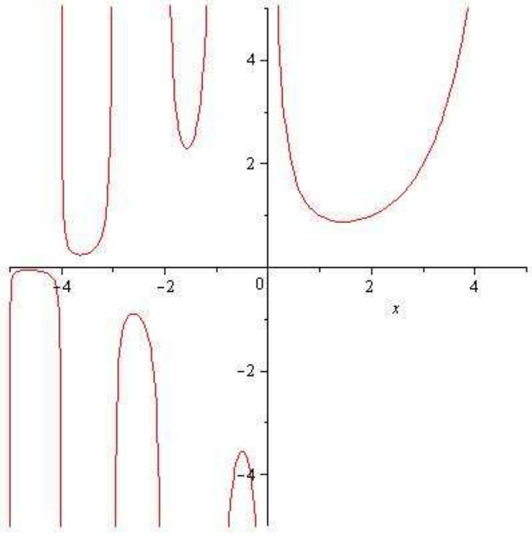
זו בעצם הרחבה של פונק' העצרת למספרים ממשיים.

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\alpha-1\right) &= \frac{\Gamma\left(\alpha\right)}{\alpha-1}\\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}\\ \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{\sqrt{\pi}}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{\pi}\\ \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) &= \frac{-2\sqrt{\pi}}{-\frac{3}{2}}=\frac{4\sqrt{\pi}}{3}\end{aligned}$$

נשים לב שיש לנו בעיה עבור כל השלמים השליליים:

$$\Gamma\left(0\right)=\frac{1}{0}$$

אם נצייר את Γ נקבל:



אם נציב בפתרון מקודם:

$$a_0=\frac{c}{\Gamma\left(m+1\right)}$$

אז נקבל:

$$y=c\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{2n}n!\cdot\Gamma(m+n+1)}x^{2n+m}$$

פונק' כזו נקראת פונק' בסל ונסמן אותה

$$y=J_{\pm m}(x)$$

מערכות משוואות - ליניאריות מסדר 1, הומוגניות, עם מקדמים קבועים

משתנה בלתי תלוי x, ויש לנו פונק' y_1, y_2, y_3. מערכת המשוואות היא:

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j$$

למשל, אם יש לנו תהליך של התפרקות חומר A לחומר B בקצב α, ואז התפרקות חומר B לחומר C בקצב β ואז התפרקות חומר C לחומר A בקצב γ, אז מתקיים:

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt}&=\gamma C-\alpha A\\ \frac{dB}{dt}&=\alpha A-\beta B\\ \frac{dC}{dt}&=\beta B-\gamma C\end{aligned}$$

וזו מערכת המשוואות שלנו.
נסמן את מערכת המשוואות שלנו:

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&\ddots&&\vdots\\ \vdots&&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

נסמן את המטריצה

$$M=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&\ddots&&\vdots\\ \vdots&&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

נניח $\overrightarrow{v_i}$ ו"ע של המטריצה M עם ע"ע λ_i אזי $\overrightarrow{y}=\overrightarrow{v_i}e^{\lambda_i x}$ פותר את המשוואה:

$$\overrightarrow{y}'=\lambda_i\overrightarrow{v_i}e^{\lambda_i x}$$

כיוון שמתקיים:

$$\overrightarrow{y}'=\lambda_i\overrightarrow{v_i}e^{\lambda_i x}=M\overrightarrow{v_i}e^{\lambda_i x}=\lambda_i\overrightarrow{v_i}e^{\lambda_i x}$$

אם המטריצה לכסינה הו"ע מהווים בסיס למרחב הn מימדי ולכן הפתרון הכללי הוא

$$\overrightarrow{y}=\sum_{i=1}^{n}c_i\overrightarrow{v_i}e^{\lambda_i x}$$

אם המטריצה לא לכסינה, נסתכל על צורת ג'ורדן של המטריצה - מטריצת בלוקים שמורכבת מבלוקי ג'ורדן שהם מטריצות מהצורה:

$$J_i\left(\lambda\right)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & \dots & 0\\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda\end{pmatrix}\in M_{i\times i}$$

וצורת הג'ורדן של מטריצה היא:

$$J\left(M\right)=\begin{pmatrix}J_{i_1}\left(\lambda_1\right) & 0 & \cdots & & 0\\ 0 & J_{i_2}\left(\lambda_1\right) & \cdots & & 0\\ \vdots & \cdots & J_{i_3}\left(\lambda_2\right) & & \vdots\\ & & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & & 0 & J_{i_k}\left(\lambda_\ell\right)\end{pmatrix}$$

המטריצה $(M-\lambda I)$ היא נילפוטנטית בתת מרחב רלוונטי.
אם המטריצה לא לכסינה הפתרון הוא

$$\overrightarrow{y}=\sum\overrightarrow{v_i}e^{\lambda_i}P_{m_i-1}\left(x\right)$$

כאשר m_i הריבוי האלגברי של הע"ע λ_i ו$P_{m_i-1}\left(x\right)$ פולינום מדרגה m_i-1.

דוגמה

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= -y_1-y_2\\ \frac{dy_2}{dx} &= y_1-y_2\end{aligned}$$

נסדר במטריצה:

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

נמצא ע"ע של המטריצה:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}-1-\lambda & -1\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix} &= 0\\ \left(-1-\lambda\right)^2 &= -1\\ \lambda &= -1\pm i\end{aligned}$$

עבור $\lambda_1 = -1 + i$ נמצא ו"ע:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
a &= i \\
b &= 1
\end{aligned}$$

לכן הו"ע הוא

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

עבור $\lambda_2 = -1 - i$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
a &= -i \\
b &= 1
\end{aligned}$$

לכן הו"ע הוא:

$$v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי הוא:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} e^{ix} + c_2 \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} e^{-ix}$$

נניח לדוגמה שיש לנו תנאי התחלה

$$y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

אזי:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} &= c_1 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1 + c_2 \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1 \\
c_1 i - c_2 i &= 2 \\
c_1 + c_2 &= 3 \\
c_1 - c_2 &= -2i \\
c_2 &= \frac{3}{2} + i \\
c_1 &= \frac{3}{2} - i
\end{aligned}$$

לכן

$$\overrightarrow{y} = \left(\frac{3}{2} + i\right) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} e^{ix} + \left(\frac{3}{2} - i\right) \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} e^{-ix}$$

דוגמה פיזיקלית

נניח שיש לנו קפיץ עם שני חרוזים עליו, ויש כוח לכיוון ימין, לכן המשוואות הבאות מתארות את התזוזה של החרוזים ביחס לנק' שיווי המשקל:

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 &= -2y_1 + y_2 \\ \ddot{y}_2 &= -2y_2 + y_1\end{aligned}$$

נכתוב בצורה מטריציאלית:

$$\begin{pmatrix}\ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 1 \\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1 \\ y_2\end{pmatrix}$$

נמצא ערכים עצמיים:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda\end{vmatrix} &= (\lambda+2)^2 - 1 = 0 \\ \lambda &= -1, -3\end{aligned}$$

עבור $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}-1 & 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix} &= 0 \\ a &= b\end{aligned}$$

לכן

$$v_1 = \begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}$$

עבור $\lambda_2 = -3$:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix} \\ a &= -b\end{aligned}$$

לכן

$$v_2 = \begin{pmatrix}1 \\ -1\end{pmatrix}$$

המשוואה מסדר שני.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_i}\ddot{f}(t) &= M\overrightarrow{v_i}f(t) = \lambda_i\overrightarrow{v_i}f(t) \\ f(t) &= e^{\sqrt{\lambda_i}t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -1 \Rightarrow \sqrt{\lambda_1} = \pm i \\ \lambda_2 &= -3 \Rightarrow \sqrt{\lambda_2} = \pm\sqrt{3}i\end{aligned}$$

לכן:

$$\begin{aligned}y &= \begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}\left[c_1e^{it} + c_2e^{-it}\right] + \begin{pmatrix}1 \\ -1\end{pmatrix}\left[c_3e^{\sqrt{3}it} + c_4e^{-\sqrt{3}it}\right] \\ &= \begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}\left[c_1\cos t + c_2\sin t\right] + \begin{pmatrix}1 \\ -1\end{pmatrix}\left[c_3\cos\sqrt{3}t + c_4\sin\sqrt{3}t\right] \\ &= A_1\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}\cos(t+\varphi_1) + A_2\begin{pmatrix}1 \\ -1\end{pmatrix}\cos\left(\sqrt{3}t + \varphi_2\right)\end{aligned}$$

שיטות לפתרון מערכות:
שיטת ההצבה

$$
\begin{aligned}
y_1^{'} &= g(y_1,\, y_2)\\
y_2^{'} &= h(y_1,\, y_2)\\
\frac{dy_1}{dy_2} &= \frac{y_1^{'}}{y_2^{'}} = \frac{g(y_1,\, y_2)}{h(y_1,\, y_2)}
\end{aligned}
$$

דוגמה

$$
\begin{aligned}
y_1^{'} &= y_1^2 + y_1 y_2\\
y_2^{'} &= y_1 y_2 + y_2^2\\
\frac{dy_1}{dy_2} &= \frac{y_1(y_1+y_2)}{y_2(y_1+y_2)} = \frac{y_1}{y_2}\\
\ln|y_1| &= \ln|y_2| + c\\
y_1 &= c_1 y_2
\end{aligned}
$$

לכן

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= y_1^2 + c_1 y_1^2 = (1+c_1)\, y_1^2\\
\frac{dy_1}{y_1^2} &= (1+c_1)\, dx\\
-\frac{1}{y_1} &= (1+c_1)\, x + c_2\\
y_1 &= -\frac{1}{(1+c_1)\, x + c_2}\\
y_2 &= -\frac{c_1}{(1+c_1)\, x + c_2}
\end{aligned}
$$

מערכת מד"ר לינארית לא הומוגנית עם מקדמים קבועים - שיטת החילוץ

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= ax + by + f(t)\\
\frac{dy}{dt} &= cx + hy + g(t)
\end{aligned}
$$

לכן

$$
\begin{aligned}
y &= -\frac{1}{b}\left(ax + f(t) - \frac{dx}{dy}\right)\\
y_t^{'} &= -\frac{1}{b}\left(ax_t^{'} + f^{'}(t) - x_t^{''}\right)
\end{aligned}
$$

נשווה בין המשוואה השניה לרביעית:

$$\begin{aligned} cx+hy+g(t) &= -\frac{1}{b}\left(ax_t^{'}+f^{'}(t)-x_t^{''}\right) \\ cx-\frac{h}{b}\left(ax+f(t)-x_t^{'}\right)+g(t) &= -\frac{1}{b}\left(ax_t^{'}+f^{'}(t)-x_t^{''}\right) \end{aligned}$$

קיבלנו מד"ר לינארית לא הומוגנית עם מקדמים קבועים מסדר 2 עבור $x(t)$. הפתרון הכללי הוא פתרון כללי של ההומוגנית + פרטי של הלא הומוגנית.
פתרון ההומוגנית נמצא על פי הפולינים האופייני, פתרון הלא הומוגנית ע"י וריאצית פרמטרים או ע"י ניחוש מתאים.
את y נמצא ע"י $y=-\frac{1}{b}\left(ax+f(t)-x_t^{'}\right)$.

דוגמה

$$\begin{aligned} x^{'} &= x+y \\ y^{'} &= x+e^t \\ x &= y^{'}-e^t \\ x^{'} &= y^{''}-e^{'} \\ y^{''}-e^t &= y^{'}-e^t+y \\ y^{''}-y^{'}-y &= 0 \\ y &= e^{\lambda t} \\ \lambda^2-\lambda-1 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} y &= c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t} \\ y^{'} &= c_1\lambda_1e^{\lambda_1 t}+c_2\lambda_2e^{\lambda_2 t} \\ x &= c_1\lambda_1e^{\lambda_1 t}+c_2\lambda_2e^{\lambda_2 t}-e^t \end{aligned}$$

שיטות אינטגרציה קומבינציוניות

דוגמה

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \gamma z-\alpha x \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha x-\beta y \\ \frac{dz}{dt} &= \beta y-\gamma z \end{aligned}$$

נשים לב שמתקיים

$$\frac{d(x+y+z)}{dt}=0$$

אזי $x+y+z$ קבוע, נקבע:

$$\begin{aligned} x+y+z &= c_1 \\ z &= c_1-x-y \end{aligned}$$

דוגמה

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= z-y \\ \frac{dy}{dt} &= x-z \\ \frac{dz}{dt} &= y-x \end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned} \frac{d\left(x+y+z\right)}{dt} &= 0 \\ x+y+z &= c_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x\frac{dx}{dt} &= xz-xy \\ y\frac{dy}{dt} &= xy-xz \\ x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt} &= 0 \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(x^2+y^2+z^2\right) &= 0 \\ x^2+y^2+z^2 &= c_2 \end{aligned}$$

פתרון מד"ר באמצעות התמרות לפלס\פורייה

התמרת לפלס:

$$g\left(s\right)=L\left(f\left(t\right)\right)=\int_0^\infty e^{-st}f\left(t\right)dt$$

התמרה הפוכה:

$$f\left(t\right)=\int_{-\infty}^\infty e^{c+ist}g\left(s\right)ds$$

כאשר c נמצאת מימין לכל קוטב של $g\left(s\right)$.

$$\begin{aligned} L\left(f^{'}\left(t\right)\right) &= \int_0^\infty e^{-st}f^{'}\left(t\right)dt \\ &= e^{-st}f\left(t\right)|_0^\infty+s\int_0^\infty e^{-st}f\left(t\right)dt \\ &= -f\left(0\right)+sL\left(f\left(t\right)\right) \end{aligned}$$

דוגמה

$$\begin{aligned} y^{'}+y &= e^{t} \\ L\left(y^{'}\right)+L\left(y\right) &= L\left(e^{t}\right) \\ y\left(0\right) &= 4 \end{aligned}$$

נציב:

$$\begin{aligned} -y\left(0\right)+sL\left(y\right)+L\left(y\right) &= \frac{1}{s-1} \\ L\left(y\right) &= \frac{1}{1+s}\left(\frac{1}{s-1}+y\left(0\right)\right) \\ &= \frac{1}{\left(s+1\right)\left(s-1\right)}+\frac{y\left(0\right)}{s+1} \\ L\left(y\right) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-1}\right]+\frac{y_0}{1+s} \\ y &= \frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t}+y_0e^{-t} \\ y &= \frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t}+4e^{-t} \end{aligned}$$

התמרת פורייה

$$\begin{aligned} g\left(k\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}f\left(x\right)dx \\ f\left(x\right) &= \int_{-\infty}^{\infty}g\left(k\right)e^{ikx}dk \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F\left(f^{'}\left(x\right)\right) &= \int e^{-ikx}\frac{d}{dx}f\left(x\right)dx \\ &= ikF\left(f\left(x\right)\right) \end{aligned}$$