

17.3.13

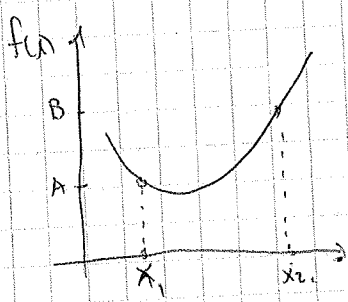
הרצאה ב

א"י - טיווח'ס

א"י - טיווח'ס יאנסן (Jensen) (I)

משפט: אם פונקציה $f(x)$ קמורה $(\uparrow)$

כלומר, אזרם הפונקציה נמצא חתחת לכל שני נקודות מחוברות



הקצרה
טקסטה:
כל קטע
העלם כל
השוק.

$$\forall x_1, x_2 \quad x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \quad \alpha \in [0,1]$$

אז' עם הקצרה

$$f[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

$$f''(x) \geq 0$$

א"י-טיווח'ס יאנסן מהווה הכללה של ההקצרה.

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1 \quad f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k) \quad \forall \alpha_k \in [0,1]$$

מובן כפיקאט'ס: נתבונן ה- n מסות הנמצאות על קו (קטע)

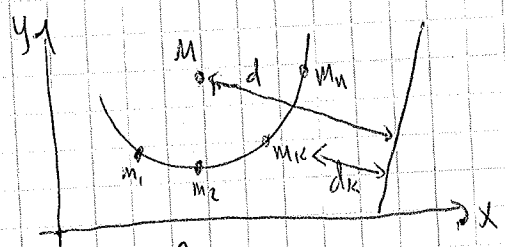
אז' מרכז המסה נמצא הנקודה המייצגת את כל המסות

כך שאם M מרכז את כל המסה באותה הנקודה

הממוצע יהיה שווה

$$M = \sum_{k=1}^n m_k$$

$$M \cdot d = \sum_{k=1}^n m_k d_k$$



m_k - המסה של גוף k

d_k - המרחק של גוף k מהקצה

M - סך המסה הנקודת מרכז הכובד

d - המרחק של נקודת הכובד מהקצה

$$d = \frac{\sum_{k=1}^n m_k d_k}{M} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{m_k}{M} \right) d_k$$

אם הקטע מתאר כ- $f(x)$

א"י-טיווח'ס ינסן יוצא מפיקציה. נסמן את מרכז המסה ב- (x_c, y_c)

הוכחה: בעזרת אינדוקציה

עבור $n=2$, נכון, להזרה.

נניח שהאי-שוויון נכון עבור $n-1$, זה"ל

$$f\left(\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k f(x_k) \quad \forall \alpha_k \in [0,1], \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k = 1$$

$$f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) = f\left[\alpha_1 x_1 + (1-\alpha_1) \sum_{k=2}^n \left(\frac{\alpha_k}{1-\alpha_1}\right) x_k\right] \quad \alpha_1 \neq 1$$

$$\leq \alpha_1 f(x_1) + \left(1-\alpha_1\right) \sum_{k=2}^n \left(\frac{\alpha_k}{1-\alpha_1}\right) f(x_k) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{נכון לפי ההזרה} \\ \text{לפי הנחת האינדוקציה} \end{array} \right.$$

$$\leq \alpha_1 f(x_1) + (1-\alpha_1) \sum_{k=2}^n \left(\frac{\alpha_k}{1-\alpha_1}\right) f(x_k)$$

$$= \sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k)$$

II אי-שוויון יאנג (Young)

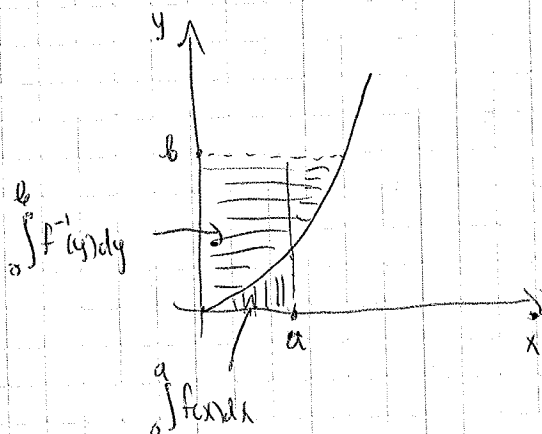
משפט: נתונה פונקציה f חיפה, $f(x) \in [0, \infty)$ כאשר מתקיים $f(0)=0$
כאשר f מונוטונית.

אז לכל $a, b > 0$, מתקיים האי-שוויון

$$\int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(y) dy \geq a \cdot b$$

הוכחה: בעזרת גרסוס

f , מונוטונית וחיפה, ולכן f חיפה.



כדי שניתן להוות גרסוס

השטח של המשבן של ה"ו

חלק מהשטח של שני האינטגרלים

המשפט השלישי

$$y = x^{p-1} \Rightarrow x = y^{\frac{1}{p-1}}, p > 1$$

נבחר גבולות (א-ב) ו-(ב-א) ונעשה

$$ab \leq \int_0^a x^{p-1} dx + \int_0^b y^{\frac{1}{p-1}} dy$$

$$= \frac{x^p}{p} \Big|_0^a + \frac{y^{\frac{1}{p-1}+1}}{\frac{1}{p-1}+1} \Big|_0^b$$

$$= \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

$$q \cong \frac{1}{p-1} + 1 = \frac{p}{p-1}$$

כאשר

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

והתקיים

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

$\forall a, b > 0, p > 1$

קבלנו:

התוצאה נקראת אי-שוויון יונג

(III) אי-שוויון הולדר (Hölder)

$$\int_a^b |x|^p dt < \infty \quad \text{אם } f(t) \in L^p(a, b) \text{ ואם } f(t) \text{ אינטגרל סופי}$$

הדרגה של הפונקציה נקראת הסדר L^p

$$\|x\|_p = \left[\int_a^b |x|^p dt \right]^{1/p}$$

כאשר הוצגת הטוריה

כאשר נגזרת פונקציה $y(t) \in L^q$, צרינו

$$\|y\|_q = \left[\int_a^b |y|^q dt \right]^{1/q}$$

$$\int_a^b |y|^q dt < \infty$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

והתקיים הקשר

$$\int_a^b |x(t)y(t)| dt \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q \quad \text{אם } p, q \text{ מתקיימים}$$

כלומר, אי-שוויון Hölder. נהווה הכללה של אי-שוויון הווי-אונדלר
 עבור $p = q = 2$

$$a = \frac{|x|}{\|x\|_p}$$

$$b = \frac{|y|}{\|y\|_q}$$

נסמן

הוכחה:

$$a \cdot b = \frac{|x(t) \cdot y(t)|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \leq \frac{|x(t)|^p}{\|x\|_p^p \cdot p} + \frac{|y(t)|^q}{\|y\|_q^q \cdot q}$$

לפי אי-שוויון יונג
 בהנחה של a, b

הנוכחיה של x לפי p
 בחזקת p

נהגים אינטגרציה של שני האיברים [המשוואה]

$$\frac{1}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \int_a^b |x(t)y(t)| dt \leq \frac{1}{\|x\|_p^p \cdot p} \int_a^b |x(t)|^p dt + \frac{1}{\|y\|_q^q \cdot q} \int_a^b |y(t)|^q dt$$

ואנחנו שמים הנתון

$$\int_a^b |x(t)|^p dt = \|x\|_p^p \quad ; \quad \int_a^b |y(t)|^q dt = \|y\|_q^q$$

נציב את הנתונים

$$\frac{1}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \int_a^b |x(t)y(t)| dt \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\int_a^b |x(t)y(t)| dt \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

וכך

(IV) אי-שוויון מינקובסקי (Minkovsky)

למשפט זה יהיו $p \geq 1$, $x(t), y(t) \in L^p$ ואז מתקיים

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

וההוכחה של אי-שוויון הריטובל.

$$\|x+y\|_p = \left[\int_a^b |x+y|^p dt \right]^{1/p}$$

הוכחה 8

$$\int_a^b |x+y|^p dt \leq \int_a^b (|x|+|y|)^p dt = \int_a^b |x|(|x|+|y|)^{p-1} dt + \int_a^b |y|(|x|+|y|)^{p-1} dt$$

אם נכניס תחת אינטגרל אחד

$$\int_a^b |x|(|x|+|y|)^{p-1} dt + \int_a^b |y|(|x|+|y|)^{p-1} dt$$

והיטל'ם דבר

א' ג' ו' Hölder

$$\leq \left(\int_a^b |x|^p dt \right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b (|x|+|y|)^{(p-1)q} dt \right)^{1/q}$$

$$+ \left(\int_a^b |y|^p dt \right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b (|x|+|y|)^{(p-1)q} dt \right)^{1/q}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ואז'לן טענות

$$(p-1) \cdot q$$

נפרק'נן בדי'ט'ר

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \Rightarrow p = (p-1)q$$

$$\int_a^b (|x+y|)^p dt \leq \|x\|_p \left(\int_a^b (|x|+|y|)^p dt \right)^{1/q} + \|y\|_p \left(\int_a^b (|x|+|y|)^p dt \right)^{1/q}$$

$$\int_a^b (|x+y|)^p dt \leq [\|x\|_p + \|y\|_p] \cdot \left(\int_a^b (|x|+|y|)^p dt \right)^{1/q}$$

ובד'ק'נן ש'א' א'ז'ר'ם ב'א'ו'ט'ר'ה

$$\frac{\left(\int_a^b (|x|+|y|)^p dt \right)^{1/q}}{\left(\int_a^b (|x|+|y|)^p dt \right)^{1/q}} = \left(\int_a^b (|x|+|y|)^p dt \right)^{1-1/q} = \left(\int_a^b (|x|+|y|)^p dt \right)^{1/p}$$

ובד'ק'נן

$$\left(\int_a^b (|x|+|y|)^p dt \right)^{1/p} \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

כל תרגילים - אי-סיונים

(1) מה גדול יותר $\int_0^{\pi} e^{\sin^2 x} dx$ או $\frac{3\pi}{2}$?

$\int_0^{\pi} e^{\sin^2 x} dx = ?$

כתיבה:

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$

יכול

$e^{\sin^2 x} = 1 + \sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{2!} + \frac{\sin^6 x}{3!} + \dots > 1 + \sin^2 x$

$\sin^2 x = \frac{1}{2} [1 - \cos(2x)]$

$1 + \sin^2 x = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$

$\int_0^{\pi} e^{\sin^2 x} dx > \int_0^{\pi} \left[\frac{3}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \right] dx = \frac{3\pi}{2}$

ולכן

$\int_0^{\pi} e^{\sin^2 x} dx > \frac{3\pi}{2}$

2) בנות ציה ואף גזירה רציפה (הם הנגזרת רציפה) וקטורה למטה

$0 \leq f'(x) \leq 2f(x)$

המקורה

$\int_0^1 f(x) dx \geq 0$

כן

הוכחה: נרמס את הטעות הנטף בקורה 1

$y = f(x) + f'(x)(x-1)$

$\int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 [f(x) + f'(x)(x-1)] dx$

לפי הנגזרת
הקטירות

$\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1$

$u = x$

$du = dx$

$v = \int_0^1 f(x) dx$

$dv = f(x) dx$

לפי: אינטגרציה בחלקים.

הנושאים להלן

4.13

הרצאה

(I) הנגזרת כמכון של תחילתים

(II) גרסה: f' , f'' , f''' , $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, $f^{(6)}$, $f^{(7)}$, $f^{(8)}$, $f^{(9)}$, $f^{(10)}$

(III) נוסחת טיילור-לורנץ, ציגנונות נגזרות

(IV) גרסה מלאה, גרסה לייזר, תחילתים

הנגזרת כמכון של תחילתים מספר 3

טבלה 2: טבלה של גזירה ראשונה, שנייה, שלישית, רביעית, חמישית, שישית, שביעית, חמישיית, תשיעית, עשירית

$$0 < f'(u) < 2f(u)$$

ש. להוכיח $\int_0^1 f(x) dx > 0$

מכיוון שהנגזרת קטורה הרי שהנגזרת

חיובית, והיא הכי גדולה הנקודה

בקצה הימני $x=1$

מכיוון שהנגזרת קטנה מהנגזרת בשני קצות

$$f(x) \geq f(1) + f'(1)(x-1)$$

לקחת את הממוצע הנגזרת $x=1$, שכן הנקודה זו

המינימום של הנגזרת הוא הנקודה ביותר

$$\int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 [f(1) + f'(1)(x-1)] dx$$

$$= f(1) + f'(1) \frac{(x-1)^2}{2} \Big|_0^1$$

$$= f(1) - \frac{1}{2} f'(1)$$

ואם הנגזרת התחילה גדולה מאפס

דבר נוספת - חישוב ישיר

$$\int_0^1 f(x) dx = \text{אינטגרל בחלקים}$$

$$u = f(x)$$

$$v = x$$

$$du = f'(x) dx$$

$$dv = dx$$

$$\int_0^1 f(x) dx = x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x f'(x) dx = f(1) - \int_0^1 x f'(x) dx$$

$$\int_0^1 x f'(x) dx \leq f'(1) \int_0^1 x dx = f'(1) \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} f'(1)$$

$$\int_0^1 f(x) dx \geq f(1) - \frac{1}{2} f'(1) > 0$$

↑
לפי הנניח.

קובלנו

(*) Mazia W. Convexity

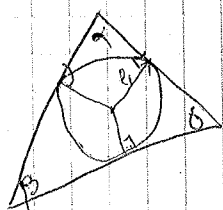
ספרים שהם צרכים

(*) Inequalities Hardy, Littlewood, Polya

תרגיל 3: הוכח, באמצעות טכניקות

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma) \leq \frac{3}{2}$$

מתקיים אי-השוויון



בתרגיל 3 נראה כי המשפט חוסם העסק

ממרכז המשפט נובע וקטורים ו-
אנכים עצמאות המשפט.

השוויות בין כל 2 וקטורים הינה כוונת

היכולות, והיא שווה סמן סחור הכוללת המושג.

נחשב את הקודם

$$(|e_1 + e_2 + e_3|)^2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + 2e_1e_2 + 2e_1e_3 + 2e_2e_3$$

$$e_i e_j = |e_i| |e_j| \cos(180 - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$(|e_1 + e_2 + e_3|)^2 = 1 + 1 + 1 - 2[\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma)]$$

$$(|e_1 + e_2 + e_3|)^2 = 3 - 2[\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma)] \geq 0$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma) \leq \frac{3}{2}$$

תרגיל 4: הוכח את אי-השוויון $(a+b)^\alpha \leq 2^{\alpha-1} (a^\alpha + b^\alpha)$

עבור $\forall a, b \geq 0, \alpha \geq 1$

בתרגיל 4 נחלק 2 אנשים ב- $2^{\alpha-1}$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^\alpha \leq \frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}$$

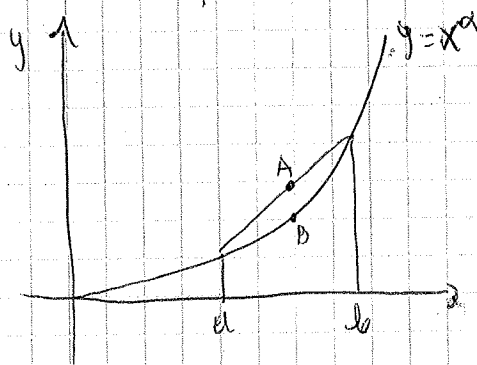
ניתבונן הסונקציה

$$y = x^\alpha$$

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

$$y'' > 0$$



$$A = \frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}$$

$$B = \left[\frac{1}{2}(a+b) \right]^\alpha$$

מכיוון שהסונקציה $y = x^\alpha$ קמורה, נקבל $A > B$

הערה: סונקציה קמורה ייחודית בעוצמה כי

האינדקס בין כל 2 נקודות חוסם את הסונקציה במחשבה.

ובמקרה כזה נקודה חוסם את הסונקציה במחשבה.

$$a^\alpha - b^\alpha \leq (a-b)^\alpha$$

תרגיל 5: הוכח אי-שוויון

$$0 \leq \alpha \leq 1 \quad a > b > 0$$

עבור

בתחילת נניח כי $\alpha = 1/3$ אזי נקבל

$$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} \leq \sqrt[3]{a-b}$$

נחלק ב- $(a-b)^\alpha$ ונקבל

$$\frac{a^\alpha - b^\alpha}{(a-b)^\alpha} \leq 1$$

$$1 - \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^\alpha}{\left(1 - \frac{b}{a}\right)^\alpha} \leq 1$$

$$\frac{b}{a} = t, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \text{נבחר}$$

$$\phi(t) = \frac{1-t^\alpha}{(1+t)^\alpha}$$

הכיוון הסוקרטי

$$\phi(t=0) = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(t)}{dt} &= \frac{-\alpha t^{\alpha-1} (1+t)^\alpha + \alpha (1+t)^{\alpha-1} (1-t)^\alpha}{(1+t)^{2\alpha}} \\ &= \frac{\alpha (1+t)^{\alpha-1} [-t^{\alpha-1} (1+t) + (1-t)^\alpha]}{(1+t)^{2\alpha}} \\ &= \frac{\alpha (1+t)^{\alpha-1} [-t^{\alpha-1} + t^\alpha + 1 - t^\alpha]}{(1+t)^{2\alpha}} \\ &= \frac{\alpha (1+t)^{\alpha-1} (1-t^{\alpha-1})}{(1+t)^{2\alpha}} \end{aligned}$$

$$0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \text{נתון כי}$$

$$1-t^{\alpha-1} = 1 - \frac{1}{t^{1-\alpha}} < 0$$

ולכן הנשערת קטנה מ-0, הסוקרטי יורדת.

$$\phi(t) \leq 1 \quad \text{ואז} \quad \phi(0) = 1$$

$$1 + \frac{1}{2} \ln(x) \leq x^2$$

תרגיל 6: הוכח אי-שוויון

$$x \geq 0$$

עבור

$$1 \leq x^2 - \frac{1}{2} \ln(x) = f(x)$$

בתרגיל 6:

יש לבדוק כי המינימום של $f(x)$ קיים ב-1.

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{2x} = \frac{2x^2 - 1}{2x}$$

$$2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x_{\min} = 1 \quad \text{נתון כי } x > 0 \quad \text{ולכן}$$

$$f(x_{\min}) = 1$$

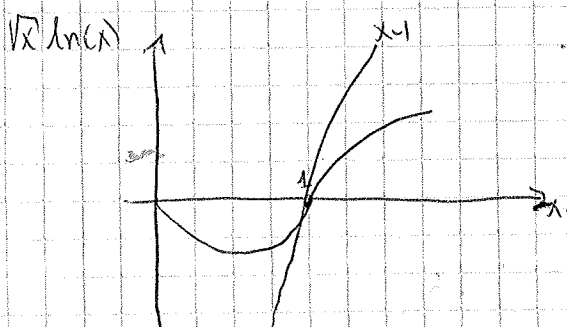
$$\frac{\ln(x)}{x-1} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$x > 0, x \neq 1$$

$$\frac{\sqrt{x} \cdot \ln(x)}{x-1} \leq 1$$

$$\sqrt{x} \ln(x) \leq x-1$$

$$\sqrt{x} \ln(x) \geq x-1$$



$$f(x) = \sqrt{x} \ln(x)$$

$$f'(x) = \frac{\ln(x) + 2}{2\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = \frac{\ln(x)}{4x\sqrt{x}}$$

$$\frac{tg(x)}{x} > 1 + \frac{1}{3}x^2$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$tg(x) > x + \frac{1}{3}x^3$$

$$\phi(x) = tg(x) - x - \frac{1}{3}x^3$$

$$\phi'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1 - 2x^2$$

$$1 + tg^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\phi'(x) = tg^2(x) - 2x^2$$

$$tg(x) > x \quad \text{בתחום } 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{התקיים}$$

$$\phi'(x) \geq 0$$

תרגיל 77 הוכח את אי-שוויון

עבור

בתחום

נפרד לטעי מקרים

$$x > 1 \quad (I)$$

$$0 < x < 1 \quad (II)$$

בתקרה $x=1$ נקודת שוויון

המשק בתקרה זו חוסק את השטח

בשטח הנשק היא $x-1$

ונתן לשטח כי האי-שוויון

מתקיים.

תרגיל 88 הוכח את אי-שוויון

עבור

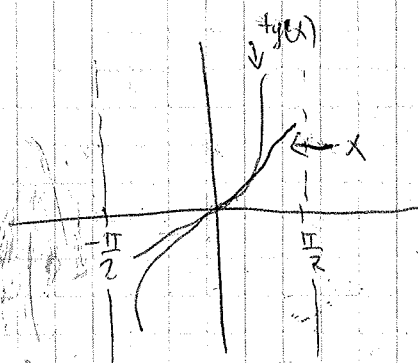
בתחום

נסתח

נשק בקצה

(לכן)

מכיוון שהנגזרת גדולה מ-0
ונקודת המפגש היא ב- $x=0$
הוא י-טון מתהווים.

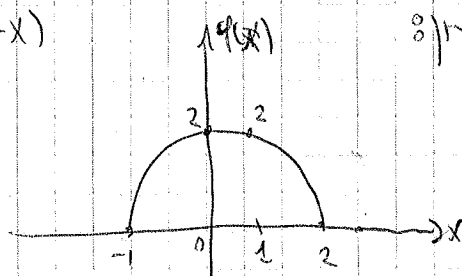


תרגיל 9, סעיף א)

$$\frac{4}{9}(e-1) < \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)(2-x)} dx < \frac{1}{2}(e-1)$$

$$\phi(x) = (x+1)(2-x)$$

בתחילת



$$\phi(x) = -x^2 + x + 2$$

$$\phi'(x) = -2x + 1 \Rightarrow x = 1/2$$

$$\phi(x_{\max} = 1/2) = 9/4$$

$$2 \leq (x+1)(2-x) \leq 9/4 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{(x+1)(2-x)} \leq \frac{4}{9}$$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)(2-x)} dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 e^x dx = \frac{1}{2}(e-1)$$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)(2-x)} dx \geq \frac{4}{9} \int_0^1 e^x dx = \frac{4}{9}(e-1)$$

סעיף ב) חסום

$$\frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) < \int_0^{1/2} \frac{\sin(x)}{x(x+1)} dx < \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$0 \leq x \leq \pi/2$$

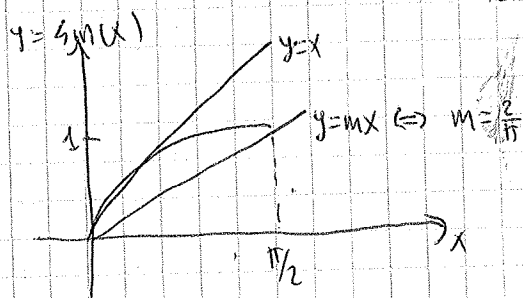
בתחילת הקטע

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$$

מתהווים

בתחום הנ"ל $0 \leq x \leq \pi/2$ הכוללת את $\sin(x)$ קטורה

ונמצאת בין הנתיב והמיתר



$$\int_0^{\pi/2} \frac{2x}{x(x+1)} dx \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{x(x+1)} dx \leq \int_0^{\pi/2} \frac{x}{x(x+1)} dx$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(x+1)} dx \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{x(x+1)} dx \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(x+1)} dx$$

$$\frac{2}{\pi} \ln(x+1) \Big|_0^{\pi/2} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{x(x+1)} dx \leq \ln(x+1) \Big|_0^{\pi/2}$$

סעיף 3.3.3 להוכיח

$$\sin(1) < \int_{-1}^1 \frac{\cos(x)}{(1+x^2)} dx < 2\sin(1)$$

$$\sin(1) < 2 \int_0^1 \frac{\cos(x)}{(1+x^2)} dx < 2\sin(1)$$

$$\frac{\cos(x)}{2} \leq \frac{\cos(x)}{1+x^2} \leq \cos(x)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $(x=1)$ $(x=0)$
 גבולות

תרגיל 10: נתון פולינום $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + 1$

הפולינום בעל n שורשים ממשיים, וכל הנקודות חיותים.

$$P_n(\alpha_k) = 0 \quad \forall \alpha_k \in \mathbb{R}, \alpha_k > 0$$

$$P_n(2) \geq 3^n \quad \text{צריך להוכיח}$$

בתרגיל 10.1 נתון כי כל הנקודות חיותים, השורשים שליליים.

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - \alpha_k) \quad \text{נפרק את הפולינום}$$

$$\alpha_k = \beta_k \geq 0$$

(NO)

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n (x + \beta_k)$$

$$P_n(2) = \prod_{k=1}^n (2 + \beta_k)$$

$$2 + \beta_k = \frac{(1 + 1 + \beta_k) \cdot 3}{3} = \left[\frac{1 + 1 + \beta_k}{3} \right] \cdot 3 \geq \sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot \beta_k} \cdot 3 = 3 \sqrt[3]{\beta_k}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 הממוצע האריתמטי הממוצע הגאומטרי

$$P_n(2) = \prod_{k=1}^n (2 + \beta_k) \geq \prod_{k=1}^n 3 \sqrt[3]{\beta_k} = 3^n \sqrt[3]{\prod_{k=1}^n \beta_k} = 3^n$$

$\uparrow$
 לכל חוק "ויטה" β_k
 מכאן הממוצע = 1

תרגיל הבקשה: יש להוכיח כי אם α מספר כלשהו חיובי.

$$P_n(\alpha) \geq (\alpha+1)^n$$

יש להוכיח