תרגיל כיתה 11 – משוואה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים

מתרגל: אדם צ'פמן

משוואות הומוגניות:

משוואה מסדר שני עם משתנים קבועים הומוגנית היא משוואה מהצורה

$y''+ay'+by=0$.

איך פותרים?

פותרים את המשוואה הריבועית $t^2+at+b=0$. אם מקבלים שני פיתרונות ממשיים λ_1 ו λ_2 שונים אז הפיתרונות של המשוואה הדיפרנציאלית הם $y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$.

אם יש פיתרון אחד λ אז $y=c_1e^{\lambda x}+c_2xe^{\lambda x}$.

דוגמאות:

- $y''-5y'+4y=0$.

למשוואה $t^2-5t+4=0$ ישנם שני פיתרונו, $\lambda_1=1$ ו $\lambda_2=4$. משמע, הפיתרונות של המשוואה הדיפרנציאלית הם $y=c_1e^{x}+c_2e^{4x}$.

- $y''-2y'+y=0$

למשוואה $t^2-2t+1=0$ יש פיתרון אחד $\lambda=1$, ולכן הפיתרונות של המשוואה הדיפרנציאלית הם $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}$.

אם למשוואה $t^2+at+b=0$ ישנם שני פתרונות מרוכבים אז הם בהכרח צמודים, כלומר אחד $a+bi$ והשני $a-bi$. במקרה זה הפיתרונות למשוואה $y''+ay'+by=0$ הם $y=c_1e^{ax}\cos(bx)+c_2e^{ax}\sin(bx)$.

דוגמא

- $y''-4y'+13y=0$.

הפיתרונות למשוואה $t^2-4t+13=0$ הם $2+3i$ ו $2-3i$, ולכן הפיתרונות למשוואה הדיפרנציאלית הם $y=c_1e^{2x}\cos(3x)+c_2e^{2x}\sin(3x)$.

תנאי התחלה:

למערכת $\begin{cases} y''+ay'+by=0 \\ y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=v_0 \end{cases}$ יש תמיד פיתרון יחיד.

דוגמא

- $y''=-4y$ כאשר $y(0)=1$ ו $y'(0)=0$.

נעביר את המשוואה לצורה מוכרת $y''+4y=0$. למשוואה $t^2+4=0$ ישנם שני פיתרונות מרוכבים $2i$ ו $-2i$. הפיתרונות של המשוואה הדיפרנציאלית (בלי להתייחס כרגע לשאר המערכת) הם $y=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)$. נציב במשוואה את $y(0)=1$ ו $y'(0)=0$ ונקבל $\begin{cases} 1=c_1 \\ 0=2c_2 \end{cases}$, משמע הפיתרון (היחיד) למערכת הוא $y=\cos(2x)$.

משוואות לא הומוגניות מיוחדות:

אם נתונה משוואה מהצורה $y''+ay'+by=de^{\alpha x}$, אז הפיתרון הכללי שלה הוא $y=f(x)+g(x)$ כאשר $f(x)$ הוא פיתרון למשוואה ההומוגנית $y''+ay'+by=0$ ו $g(x)$ הוא פיתרון פרטי כלשהו למשוואה $y''+ay'+by=de^{\alpha x}$.

את $g(x)$ מומלץ למצוא בהתאם למקרים הבאים:

1. אם α אינו פיתרון למשוואה $t^2+at+b=0$ אזי נחפש פיתרון מהצורה $y=me^{\alpha x}$.
2. אם α הוא אחד משני הפיתרונות של המשוואה $t^2+at+b=0$ אזי נחפש פיתרון מהצורה $y=mxe^{\alpha x}$.
3. אם α הוא אחד הפיתרון היחידי של המשוואה $t^2+at+b=0$ אזי נחפש פיתרון מהצורה $y=mx^2e^{\alpha x}$.

דוגמאות:

- $y''-2y'-24y=e^{3x}$.

פיתרון: למשוואה $t^2-2t-24=0$ ישנם שני פיתרונות 6 ו -4. 3 אינו אחד מהפיתרונות, ולכן נחפש פיתרון פרטי מהצורה $y=me^{3x}$. במקרה זה $y'=3me^{3x}$, $y''=9me^{3x}$. נציב במשוואה ונקבל $9me^{3x}-2(3me^{3x})-24(me^{3x})=e^{3x}$. משמע $-21me^{3x}=e^{3x}$, ולכן $m=-\frac{1}{21}$.

מכאן שהפיתרון הכללי למשוואה $y''-2y'-24y=e^{3x}$ הוא

$$y=c_1e^{6x}+c_2e^{-4x}-\frac{1}{21}e^{3x}.$$

- $y''+3y'-10y=2e^{2x}$.

פיתרון: למשוואה $t^2+3t-10=0$ ישנם שני פיתרונות, 2 ו -5. מכיוון ש 2 הוא אחד הפיתרונות, נחפש פיתרון פרטי למשוואה מהצורה $y=mxe^{2x}$. במקרה זה $y'=me^{2x}+2mxe^{2x}$ ו $y''=4me^{2x}+4mxe^{2x}$. נציב במשוואה ונקבל $4me^{2x}+4mxe^{2x}+3(me^{2x}+2mxe^{2x})-10(mxe^{2x})=2e^{2x}$. משמע $7me^{2x}=2e^{2x}$, ולכן $m=\frac{2}{7}$. מכאן שהפיתרון הכללי למשוואה $y''+3y'-10y=2e^{2x}$ הוא $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-5x}+\frac{2}{5}xe^{2x}$.

- $y''-6y'+9y=e^{3x}$.

פיתרון: למשוואה $t^2-6t+9=0$ יש פיתרון אחד והוא 3. לכן נחפש פיתרון פרטי למשוואה מהצורה $y=mx^2e^{3x}$. במקרה זה $y'=2mxe^{3x}+3x^2e^{3x}$ ו $y''=2me^{3x}+12mxe^{3x}+9x^2e^{3x}$. נציב במשוואה ונקבל

$$2me^{3x}+12mxe^{3x}+9x^2e^{3x}-6(2mxe^{3x}+3x^2e^{3x})+9(mx^2e^{3x})=e^{3x}.$$

משמע $e^{3x} = 2me^{3x}$ ולכן $m = \frac{1}{2}$. מכאן שהפיתרון הכללי למשוואה

$y''-6y'+9y = e^{3x}$ הוא $y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + \frac{1}{2}x^2e^{3x}$.