

תרגיל 8

הגדרות וסימונים

ניישר קו בין קבוצות ההרצאה והתרגול לצורך התרגיל:

1. מרחב (X, τ) הוא B_2 אם קיים לו בסיס בן מניה.
2. הטופולוגיה הקו-מנייתית (לפעמים נקראת גם קו-בת-מניה) על קבוצה X מוגדרת ע"י

$$\tau_{cof} := \{\emptyset\} \cup \{O \subseteq X \mid |O^c| < \infty\}$$

3. פרה-בסיס (נקרא גם תת בסיס) על מרחב טופולוגי (X, τ) הוא קבוצה של קבוצות פתוחות $\alpha \subseteq \tau$ כך ש- $\alpha^{\cap F}$ (כלומר אוסף החיתוכים הסופיים של קבוצות מ- α) הוא בסיס. ישנו משפט שאומר שכל כיסוי α פתוח של X (כלומר אוסף של קבוצות פתוחות כך ש- $\bigcup \alpha = X$) הוא פרה-בסיס של $(\alpha^{\cap F})^{\cup}$.

תרגילים

1. הוכיחו שאם (X, τ) הוא מרחב B_2 אז $|\tau| \leq \aleph = 2^{\aleph_0}$.
2. מצאו מתי הטופולוגיה הקו-בת-מניה (X, τ_{coc}) היא B_2 .
3. הראו שבמרחב טופולוגי (X, τ) שהוא B_2 לכל כיסוי פתוח יש תת כיסוי בן מניה. כיסוי פתוח הוא אוסף $\{O_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$ של תתי קבוצות פתוחות כך ש- $\bigcup_{i \in I} O_i = X$. תת כיסוי הוא תת קבוצה $J \subseteq I$ כך ש- $\{O_j\}_{j \in J}$ כיסוי.
4. הראו שאם (X, τ) הוא B_2 אז **לכל** בסיס γ יש תת קבוצה בת מניה $\gamma' \subseteq \gamma$ שמהווה בסיס לטופולוגיה גם היא.
5. יהי (X, τ) מרחב טופולוגי ותהי $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(X)$ משפחה של תתי קבוצות. לכל $A \in \mathcal{J}$ ו- $\varepsilon > 0$ נגדיר

$$W_A(\varepsilon) := \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_{x \in A} |f(x)| < \varepsilon \right\} \subseteq \mathbb{R}^X$$

נגדיר גם

$$\alpha_{\mathcal{J}} := \left\{ f + W_A(\varepsilon) \mid f \in \mathbb{R}^X, A \in \mathcal{J}, \varepsilon > 0 \right\}$$

שימו לב שחיבור של פונקציה עם קבוצה מוגדר לפי

$$\forall f \in \mathbb{R}^X, \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^X : f + \mathcal{A} := \{f + g \mid g \in \mathcal{A}\}.$$

הראו ש- $\alpha_{\mathcal{J}}$ הוא תמיד פרה-בסיס ל- \mathbb{R}^X . בנוסף, עבור כל אחת מהאפשרויות הבאות ל- \mathcal{J} קבעו אם $\alpha_{\mathcal{J}}$ הוא בסיס. הוכיחו את טענותיכם.

- (א) $\mathcal{J}_1 := \{\{x\} \mid x \in X\}$ - כלומר קבוצת כל הנקודונים
- (ב) $\mathcal{J}_2 := \{F \subseteq X \mid |F| < \infty\}$ - כלומר קבוצת הקבוצות הסופיות.
- (ג) $\mathcal{J}_3 := \{B \subseteq X \mid B \text{ bounded is}\}$ - כלומר כל הקבוצות החסומות (כאן צריך להניח ש- X הוא מטרי)
- (ד) $\mathcal{J}_4 := \{B \subseteq X \mid B \text{ connected is}\}$ - כלומר כל הקבוצות הקשירות
- (ה) $\mathcal{J}_5 := \{X\}$

6. בסימונים של התרגיל הקודם, מצאו את היחסים בין הטופולוגיות שמושרות ע"י $\alpha_{\mathcal{J}_1}, \alpha_{\mathcal{J}_2}, \alpha_{\mathcal{J}_3}, \alpha_{\mathcal{J}_4}, \alpha_{\mathcal{J}_5}$ במקרים הבאים:

$$X = \mathbb{R} \quad (\text{א})$$

$$X = \mathbb{Q} \quad (\text{ב})$$

$$X = [0, 1] \quad (\text{ג})$$

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2n, 2n + 1] \quad (\text{ד})$$