

# תרגיל 1

להגשה עד 20.11.16

## שאלה 1

יהי  $(X, \|\cdot\|)$  מרחב לינארי ונורמי. הוכיחו כי:

$A \subseteq X$  סגורה אם ורק אם לכל סדרה  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$  מתקיים התנאי הבא, עבור  $a \in X$ :

$$\|a - a_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies a \in A$$

## שאלה 2

יהי  $I \subseteq \mathbb{R}$  קטע סגור.

נגדיר

$$C(I) := \{f \mid f: I \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ is continuous}\}; \quad \|\cdot\|_{C(I)} = \max_{t \in I} |f(t)|$$

הוכיחו כי:

1.  $(C(I), \|\cdot\|_{C(I)})$  הינו מרחב לינארי ונורמי.

2. ההתכנסות ב  $C(I)$  שקולה להתכנסות במידה שווה.

3. תהי

$$A = \{f \mid \exists t: |f(t)| > 1\}$$

הוכיחו כי  $A$  פתוחה ב  $C(I)$ .

4. תהי

$$B = \{f \mid \forall t: |f(t)| > 1\}$$

האם  $B$  פתוחה ב  $C(I)$ ?

## שאלה 3

תהי  $X$  קבוצה. לכל  $x, y \in X$  נגדיר:

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

1. הוכיחו כי  $d$  הינה מטריקה על  $X$ .

2. מהי הטופולוגיה  $\tau_d$  המושרית ע"י  $d$ ? מיהם הכדורים הפתוחים ב  $(X, \tau_d)$ ?

## שאלה 4

יהי  $(X, \tau)$  מרחב טופולוגי.

1. קבוצה  $A \subseteq X$  נקראת **קומפקטית** אם לכל כיסוי של  $A$  ע"י קבוצות פתוחות קיים תת כיסוי סופי. כלומר, עבור  $\{V_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i \Rightarrow \exists i_1, \dots, i_n : A \subseteq \bigcup_{k=1}^n V_{i_k}$$

הוכיחו כי אם הטופולוגיה  $\tau$  מושרית ממטריקה, אזי כל קבוצה קומפקטית היא סגורה וחסומה.

2. אם הקבוצה  $X$  הינה קומפקטית ב  $(X, \tau)$ , אזי  $(X, \tau)$  נקרא **מרחב קומפקטי**.

הוכיחו כי  $(X, \tau)$  קומפקטי אם ורק אם מתקיים התנאי הבא:

אם  $\{F_i\}_{i \in I}$  משפחה של קבוצות סגורות ב  $(X, \tau)$  כך שכל חיתוך סופי של קבוצות מתוכה אינו ריק אזי

$$\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$$

בהנאה (: