בס"ד

תרגול מס' 6 בחשבון אינפי 2

אינטגרלים לא אמיתיים (מוכללים) - אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון.

הגדרה: אינטגרל מסוים יקרא **לא אמיתי מסוג ראשון** אם הוא בעל גבול אינטגרציה (תחתון או עליון) אינסופי.

<u>תכונות חשובות:</u>

א. לכל נקודה c מתקיים: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$.

ב. מספיק שאחד מהאינטגרלים באגף ימין בסעיף א' יתבדר כדי שהאינטגרל באגף שמאל יתבדר.

ג. $\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$ ולכן כדאי לפעמים לחשב קודם את הפונקציה הקדומה ולהציב בה גבולות קבועים ואותם להשאיף אח"כ לאינסוף.

ד. $(a>0)$ $\int_{a}^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\alpha>1$.

דוגמא: $\int_{1}^{\infty}\cos x\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\cos x\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(\sin x\Big|_{1}^{b}\right) = \lim_{b\to\infty}(\sin b) - \sin 1 =$ לא קיים

תרגיל: חשבו: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

פתרון: נעזר בהחלפת משתנים: $u=\arctan x \ \to\ du=\frac{dx}{1+x^2}$ ונקבל:

$$x\to-\infty \ \Rightarrow\ u\to-\frac{\pi}{2}$$
$$x\to\infty \ \Rightarrow\ u\to\frac{\pi}{2}$$

ולכן: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}u\,du = u^2\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$.

שאלה: האם נוכל להסיק מהתרגיל האחרון כי לכל $f(x)$ אי-זוגית מתקיים: $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=0$?

תשובה: לא ! צבירת ערך אינסופי במקטע אחד לא יכולה להיות מקוזזת ע"י צבירת ערך נגדי אינסופי במקטע אחר. למשל: $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ מתבדר: $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \int_{-\infty}^{0} x\,dx + \int_{0}^{\infty} x\,dx$ שכן האינטגרל בכל אגף מתבדר.

במקרה של התרגיל האחרון זה שונה שכן: $\int_{-\infty}^{0} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \int_{-\pi/2}^{0} u\,du = \left.\frac{u^2}{2}\right|_{-\pi/2}^{0} = -\frac{\pi^2}{8} < \infty$.

תרגיל: חשבו: $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x}dx$

פתרון: נבחר $c=0$ ונקבל: $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x}dx = \int_{-\infty}^{0} xe^{-x}dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-x}dx$.

נחשב: $\int xe^{-x}dx = \begin{bmatrix} u=x & \to & u'=1 \\ v=-e^{-x} & \to & v'=e^{-x} \end{bmatrix} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x}$ ומכאן:

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x}dx = -\lim_{a\to-\infty}\left(e^{-x}(1+x)\right)\Big|_{a}^{0} = -\lim_{a\to-\infty}\left(1-e^{-a}(1+a)\right) = \infty$$

ולכן אפשר לקבוע כי האינטגרל מתבדר (גם בלי לחשב את האינטגרל המחובר השני שהוא דווקא מתכנס).

מבחני התכנסות.

מבחן השוואה ראשון. בהינתן: $\forall x\in[a,\infty):\ 0\le g(x)\le f(x)$ אז מתקיים:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx \text{ מתכנס } \Leftarrow \int_{a}^{\infty} g(x)dx \text{ מתכנס.}$$

תרגיל: קבע התכנסות של: $I=\int_{1}^{\infty} x^{-x}dx$.

פתרון: נשים לב כי: $x^{-2} > x^{-x} \Rightarrow x^2 < x^x \quad \forall x>2:$. כמו כן ידוע (תכונה ד') כי $\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ מתכנס

ולכן עפ"י המשפט האחרון גם $\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x^x}$ מתכנס. האינטגרל $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x^x}$ וודאי מתכנס שכן זהו אינטגרל של

פונקציה רציפה בקטע סופי. בסה"כ נקבל: $I=\int_{1}^{2}\frac{dx}{x^x}+\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x^x}$ מתכנס.

תרגיל: קבע התכנסות של $\int_1^\infty \frac{e^{\sin x}}{x}dx$.

פתרון: נרשום: $\forall x\in\mathbb{R}:\ -1\le \sin x\le 1$ ומכאן: $\frac{1}{ex}\le\frac{e^{\sin x}}{x}\le\frac{e}{x}$.

האינטגרל $\int_1^\infty \frac{dx}{ex}$ מתבדר ולכן "קל וחומר" שגם שלנו.

תרגיל: קבעו התכנסות של: $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x}dx$.

פתרון: נשים לב כי $\arctan x$ היא פונקציה מונוטונית עולה ולכן בתחום האינטגרציה:

$\forall x>1:\ \arctan x>\arctan 1=\frac{\pi}{4}>0$ ולכן: $\forall x>1:\ \frac{\arctan x}{x}>\frac{\pi}{4x}>0$. אם כן מתוך משפט

ההשוואה הראשון נקבל שכיוון ש: $\int_1^\infty \frac{\pi}{4x}dx=\frac{\pi}{4}\int_1^\infty\frac{dx}{x}$ מתבדר (תכונה ד'), אז גם האינטגרל שלנו מתבדר.

מבחן ההשוואה השני (הגבולי). בהינתן: $\forall x\in[a,\infty):\ 0\le g(x),f(x)$ וקיים הגבול:

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$, נסמן: $I_g=\int_a^\infty g(x)dx$, $I_f=\int_a^\infty f(x)dx$. אזי:

1. אם $0<L<\infty$ אזי I_f, I_g מתכנסים או מתבדרים כאחד ("חברים").
2. אם $L=0$ אזי: I_g מתכנס $\Leftarrow$ I_f מתכנס.
3. אם $L=\infty$ אזי: I_f מתכנס $\Leftarrow$ I_g מתכנס.

תרגיל: קבע התכנסות של $\int_1^\infty \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}$.

פתרון: נעזר במבחן ההשוואה הגבולי ע"י השוואה לפונקציה $\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(2+\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}+5\right)=2$$

לכן, מתוך מבחן ההשוואה השני, האינטגרל שלנו ו- $\int_1^\infty\frac{1}{x}dx$ הם חברים, וידוע כי $\int_1^\infty\frac{dx}{x}$ מתבדר, אזי גם

האינטגרל שלנו מתבדר.

תרגיל: חשב את הגבול: $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_1^x \cos\frac{1}{t}dt$.

פתרון: מתוך ההשוואה: $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}}{1}=1$ נסיק כי: $\lim_{x\to\infty}\int_1^x \cos\frac{1}{t}dt=\infty$. אם כן נוכל להיעזר במשפט לופיטל. עפ"י המשפט היסודי של החדו"א: $\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x \cos\frac{1}{t}dt}{x}\underbrace{=}_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}\xrightarrow{L'Hopital}\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}}{1}=1$.

מבחן דריכלה. תהיינה f,g פונקציות רציפות בקטע $[a,\infty)$ כך שמתקיים:

1. f יורדת לאפס.
2. f' רציפה בקטע.
3. הפונקציה $G(x)=\int_a^x g(t)dt$ חסומה בקטע $[a,\infty)$.

אזי: $\int_a^\infty f(x)\cdot g(x)dx$ מתכנס.

הערה: בשונה ממבחני ההשוואה הקודמים, מבחן דיריכלה עוסק גם בפונקציות "מזגזגות", כלומר שמקבלות גם ערכים חיוביים וגם שליליים אינסוף פעמים.

תרגיל: הוכח: $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ מתכנס לכל $\alpha>0$.

פתרון: נסמן: $g(x)=\sin x$, $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$. בתחום $[1,\infty)$ f גזירה וניגזרתה רציפה וכן לכל $\alpha>0$ היא יורדת לאפס. כמו כן: $G(x)=\int_1^x \sin t\,dt=-\cos t\Big|_1^x=\cos 1-\cos x$ היא פונקציה חסומה ב- $[1,\infty)$.

לכן עפ"י משפט דריכלה $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ מתכנס לכל $\alpha>0$.

הערה: להבדיל מטורי מספרים שם תנאי הכחי להתכנסות הוא: $\lim_{k\to\infty}a_k=0$, כאן $f(x)$ לא חייבת לשאוף לאפס כדי שהאינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ יתכנס. לדוגמה: $\int_a^\infty \sin\left(x^2\right)dx$ מתכנס:

נציב: $t=x^2$ עם: $dt=2xdx$ ונקבל: $\int_a^\infty \sin\left(x^2\right)dx=\int_{a^2}^\infty \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$ שמתכנס עפ"י התרגיל הקודם.