

זמן המבחן: 3 שעות. מבחן פתוח: כל חומר עזר מותר. משקל כל שאלה 22 נק', ענו על כל השאלות.

1. מצאו פתרון למד"ר $3xy^2y' + 2y^3 = \cos(x^2)$ המקיים $y(\sqrt{\pi}) = 1$.

המד"ר הוא בעצם מהצורה $(2y^3 - \cos(x^2))dx + 3xy^2dy = 0$, זו אינה משוואה מדוייקת.

נחפש גורם אינטגרציה שתלוי ב x בלבד:

$$\mu = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln(x)} = x \quad \text{תלוי ב } x \text{ בלבד ולכן גורם האינטגרציה הוא } \frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{6y^2 - 3y^2}{3xy^2} = \frac{1}{x}$$

מכאן שהמשוואה $x(2y^3 - \cos(x^2))dx + 3x^2y^2dy = 0$ מדוייקת.

$$\text{לכן } U(x, y) = \int 3x^2y^2dy + c(x) = x^2y^3 + c(x)$$

$$\text{כעת } U_x = P \text{ ולכן } 2xy^3 + c'(x) = 2xy^3 - x\cos(x^2)$$

$$\text{לכן } c'(x) = -x\cos(x^2) \text{ ולאחר אינטגרציה פשוטה נקבל כי } c(x) = -\frac{\sin(x^2)}{2}$$

$$\text{סה"כ } U(x, y) = x^2y^3 - \frac{\sin(x^2)}{2} \text{ ולכן פתרון המד"ר נתון ע"י המשוואה הסתומה } x^2y^3 - \frac{\sin(x^2)}{2} = C$$

$$\text{נציב } x = \sqrt{\pi} \text{ ולפי הנתון נקבל כי } \pi - 0 = C \text{ ולכן } x^2y^3 - \frac{\sin(x^2)}{2} = \pi$$

$$\text{מכאן שהפתרון הסופי הינו } y = \sqrt[3]{\frac{\pi + \frac{\sin(x^2)}{2}}{x^2}}$$

2. מצאו פתרון למד"ר $\frac{-3y'}{y} = xy^3 - 1$ המקיים $y(0) = 1$.

זו בעצם מד"ר ברנולי $-3y' + y = xy^4$

נציב $z = \frac{1}{y^3}$ לכן $z' = \frac{-3y'}{y^4}$ ונקבל את המד"ר הלינארית $z' + z = x$.

$$z = e^{-\int 1 dx} \left(\int x e^{\int 1 dx} + C \right) = e^{-x} \left(\int x e^x + C \right) = e^{-x} (x e^x - e^x + C) = x - 1 + \frac{C}{e^x} \quad \text{לכן}$$

$$y^3 = \frac{1}{x - 1 + \frac{C}{e^x}} \quad \text{לכן}$$

נציב $x = 0$ ולפי הנתון נקבל כי $1 = \frac{1}{-1 + C}$ ולכן $C = 2$.

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x - 1 + \frac{2}{e^x}}} \quad \text{סה"כ הפתרון הסופי הינו}$$

3. מצאו פתרון למד"ר $y'' = y + e^{2x}e^{(e^x)}$ המקיים $y(0) = 0, y'(0) = e$.

זו מד"ר לינארית לא הומוגנית עם מקדמים קבועים $y'' - y = e^{2x}e^{(e^x)}$.

נמצא פתרון כללי למד"ר ההומוגנית, ונמצא פתרון פרטי באמצעות וריאצית מקדמים.

הפולינום האופייני הוא $x^2 - 1$ עם שורשים ± 1 .

לכן הפתרון הכללי להומוגנית הינו $y_H = c_1e^x + c_2e^{-x}$.

נחפש פתרון פרטי מהצורה $y_p = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}$ באמצעות כלל קרמר.

$$c_1(x) = \frac{e^{(e^x)}}{2} \quad \text{ולכן} \quad c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ e^{2x}e^{(e^x)} & -e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{-e^x e^{(e^x)}}{-2}$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^{2x}e^{(e^x)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{e^{3x}e^{(e^x)}}{-2}$$

הפעם האינטגרציה פחות מיידית, נחשב אותה:

$$\begin{aligned} c_2(x) &= \frac{-1}{2} \int e^{3x}e^{(e^x)} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right\} = \frac{-1}{2} \int t^2 e^t dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} f' = e^t \quad g = t^2 \\ f = e^t \quad g' = 2t \end{array} \right\} = \frac{-t^2 e^t}{2} + \int t e^t dt = \left\{ \begin{array}{l} f' = e^t \quad g = t \\ f = e^t \quad g' = 1 \end{array} \right\} = \\ &= \frac{-t^2 e^t}{2} + t e^t - \int e^t dt = \frac{-t^2 e^t}{2} + t e^t - e^t = \frac{-e^{2x}e^{(e^x)}}{2} + e^x e^{(e^x)} - e^{(e^x)} \end{aligned}$$

$$y_p = \frac{e^x e^{(e^x)}}{2} + \left(\frac{-e^{2x} e^{(e^x)}}{2} + e^x e^{(e^x)} - e^{(e^x)} \right) e^{-x} = e^{(e^x)} - e^{(e^x)-x}$$

סה"כ הפתרון הפרטי הינו

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{(e^x)} - e^{(e^x)-x}$$

הפתרון הכללי הינו

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 + e - e = 0$$

ונקבל

$$y'(0) = e \Rightarrow c_1 - c_2 + e - 0 = e$$

ונקבל , $y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + e^x e^{(e^x)} - (e^x - 1) e^{(e^x)-x}$

$$y = e^{(e^x)} - e^{(e^x)-x}$$

לכן סה"כ $c_1 = c_2 = 0$ והפתרון הסופי הוא

4. מצאו פתרון למד"ר $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{x} + y + 1$ המקיים $y(1) = 0$.

$$y' = \frac{1}{x}(y+1) + y + 1 = \left(\frac{1}{x} + 1 \right) (y+1)$$

ראשית נשים לב כי זו מד"ר פרידה

$$\frac{dy}{y+1} = \left(\frac{1}{x} + 1 \right) dx$$

נפריד את המשתנים

$$\ln|y+1| = \ln|x| + x + C$$

נבצע אינטגרציה

$$y+1 = \pm (|x| e^x e^C) = C x e^x$$

לכן $y+1 = \pm (|x| e^x e^C) = C x e^x$ (כאשר הפכנו את $\pm |x| e^C$ לצורה Cx עבור קבוע כללי כלשהו,

כיוון שעבור $C = 0$ אנו מקבלים $y = -1$ שהוא אכן פתרון למד"ר).

$$C = \frac{1}{e}$$

נציב $x = 1$ ולכן לפי הנתון $1 = C e$ ולכן

$$y = x e^{x-1} - 1$$

סה"כ נקבל את הפתרון הסופי

5. מצאו פתרון למד"ר $y'' + y = e^x$ המקיים $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

ישנן מספר דרכים לפתור את השאלה הזו, אנו נשתמש בהתמרת לפלס בפתרון זה.

נבצע את ההתמרה:

$$s^2 F(s) - sy(0) - y'(0) + F(s) = \frac{1}{s-1}$$

לכן יחד עם תנאי ההתחלה נקבל כי $F(s) = \frac{1}{(1+s^2)(s-1)}$

נבצע פירוק לשברים חלקיים ונקבל

$$F(s) = \frac{1}{(1+s^2)(s-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} \right)$$

נבצע התמרה הפוכה ונקבל את הפתרון

$$y = \frac{1}{2} (e^x - \cos(x) - \sin(x))$$