מבחן בקורס הכנה למתמטיקה לקראת שנת תש"פ

מרצה: דר' ארז שיינר. תאריך: 15/09/19

הוראות: יש לפתור כמה שיותר שאלות ולנמק היטב. כל שאלה שווה 17 נקודות. בהצלחה (=

1. נגדיר את הפונקציות

$$f(x)=\begin{cases} x & x>1 \\ x^2+1 & x\le 1\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 2x & x>1 \\ 0 & x=1 \\ -x^2 & x<1\end{cases}$$

מצאו לאילו ערכי x מתקיים אי השוויון $g(f(x))>f(x)$

תחום ראשון $x>1$:

בתחום זה $f(x)=x$

ולכן אי השיוויון שקול לאי השיוויון הבא:

$$g(x)>x$$

שוב, כיוון ש $x>1$ מתקיים כי $g(x)=2x$ וסה"כ אי השיוויון שקול ל:

$$2x>x$$
$$x>0$$

מתקיים בכל התחום.

תחום שני $x\le 1$:

בתחום זה $f(x)=x^2+1$

ולכן אי השיוויון הוא

$$g(x^2+1)>x^2+1$$

כאשר $x\le 1$ ניתן לומר כי $x^2+1\ge 1$

נשים לב ש $x^2+1=1$ אם ורק אם $x=0$ ולכן נטפל במקרה זה בנפרד, כעת:

אם $x=0$ אי השיוויון הוא $g(1)>1$ כלומר $0>1$, לא מתקיים.

נותר תת התחום $0\neq x\le 1$:

בתחום זה, $x^2+1>1$ ולכן

$$g(x^2+1)=2(x^2+1)$$

ואי השיוויון נראה כך:

$2(x^2+1) > x^2+1$
$x^2+1 > 0$

מתקיים בכל התחום.

סה"כ אי השיוויון מתקיים בכל הממשיים פרט ל$x=0$.

2. א. מצאו את כל הפתרונות $z \in \mathbb{C}$ למשוואה $z^6 = (1+i)^6$

ב. מצאו את כל הפתרונות $z \in \mathbb{C}$ למשוואה $z^2 - 2iz - 1 = 0$ (רמז: חשבו את $(z-i)^2$)

א. ראשית נעביר את צד ימין לצורה קוטבית

$$1+i = \sqrt{2} \cdot cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(1+i)^6 = 8 \cdot cis\left(\frac{6\pi}{4}\right) = 8 \cdot cis\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

ולכן הפתרונות שלנו הם:

$$z_k = \sqrt[6]{8} \cdot cis\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{6}\right)$$

כאשר $k = 0,1,2,3,4,5$

ב. נקשיב לרמז

$$(z-i)^2 = z^2 - 2iz + i^2 = z^2 - 2iz - 1$$

כלומר אנחנו מתבקשים בשאלה לפתור את המשוואה

$$(z-i)^2 = 0$$

זה מתקיים אם ורק אם $z - i = 0$ כלומר $z = i$ פתרון יחיד.

3. מצאו שני וקטורים $0 \neq u, v \in \mathbb{R}^3$ במרחב המאונכים זה לזה וגם מקיימים כי $(u+2v) \perp (u-2v)$ (כלומר הוקטורים $u+2v, u-2v$ מאונכים זה לזה.)

נחקור את התנאי הנוסף ונראה אם אפשר לסחוט משם משהו.

$$(u+2v) \perp (u-2v)$$

אם ורק אם

$$(u+2v)(u-2v) = 0$$

$$uu - 2uv + 2vu - 4vv = uu - 4vv = 0$$

כלומר צריך וקטורים כך ש

$$|u|^2 = 4|v|^2$$

ומאונכים זה לזה.

נבחר

$$v = (1,0,0)$$

$$u = (0,2,0)$$

וקל לוודא שהם מקיימים את כל הדרוש.

4. הוכיחו באינדוקציה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

בדיקה:

עבור $n = 1$ צריך לוודא כי

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1+1}$$

כלומר צריך לוודא כי

$$\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

וואלה זה נכון.

יהי n עבורו הטענה נכונה כלומר נתון כי

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

צ"ל עבור $n+1$ כלומר צ"ל כי

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$$

כעת

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)\big((n+1)+1\big)} \underbrace{=}_{\text{הנחת האינדוקציה}} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\big((n+1)+1\big)} =$$
$$= \frac{1}{n+1}\left[n + \frac{1}{n+2}\right] = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n^2+2n+1}{n+2} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

כפי שרצינו להוכיח.

5. פתרו את האינטגרל $\int \sin\left(\sqrt{x}\right)dx$

$$\int \sin(\sqrt{x})\,dx = \begin{Bmatrix} t=\sqrt{x} \\ dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ x=t^2 \\ dx=2tdt \end{Bmatrix} = \int \sin(t)\,2tdt = \begin{Bmatrix} f'=\sin(t) & g=2t \\ f=-\cos(t) & g'=2 \end{Bmatrix} = -2t\cos(t)+2\int \cos(t)\,dt =$$
$$= -2t\cos(t)+2\sin(t)+C = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C$$

6. <u>הגדרה:</u> תהי קבוצת מספרים $A\subseteq\mathbb{R}$. מספר $m\in\mathbb{R}$ נקרא <u>חסם מלעיל</u> של A אם $\forall a\in A: a\leq m$

א. נסחו תנאי השקול לכך ש m אינו חסם מלעיל של הקבוצה A.

ב. קבעו **והוכיחו** לכל זוג האם המספר הנתון m הוא חסם מלעיל של הקבוצה הנתונה:

$m=1$ $A=\varnothing$	$m\in\mathbb{N}$ $B=\mathbb{N}$	$m=4$ $C=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2<9\}$

א. m אינו חסם מלעיל של A אם $\exists a\in A: a>m$

ב.

צ"ל כי $\forall a\in\emptyset: a\leq 1$ זה נכון באופן ריק.

נוכיח ש m אינו חסם מלעיל של $B=\mathbb{N}$.

נבחר $a=m+1\in B$ ואכן $a>m$

4 אכן חסם מלעיל של C.

יהי $c\in C$ צ"ל $c\leq 4$

נב"ש $c>4$ ולכן $c^2>16$ בסתירה לכך ש$c\in C$

7. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

א. לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים $A\setminus(B\setminus A)=A\setminus(C\setminus A)$.

ב. לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים $(A\cap B)\setminus C=A\setminus(B\cap C)$.

א. הוכחה:

תהיינה A,B,C.

נעשה הכלה בכיוון אחד, הכיוון השני דומה.

יהי $x \in A \setminus (B \setminus A)$

צ"ל כי $x \in A \setminus (C \setminus A)$

מהנתון מתקיים כי $x \in A$ ולכן $x \notin C \setminus A$

כעת $x \notin C \setminus A$ אך $x \in A$ ולכן $x \in A \setminus (C \setminus A)$

ב. הפרכה:

$$A = \{1\}, B = C = \emptyset$$

$$(A \cap B) \setminus C = \emptyset$$
$$A \setminus (B \cap C) = A = \{1\} \neq \emptyset$$