

# תרגיל בית 7 במבנים אלגבריים

## 89-214 סמסטר א' תשע"ז

**הוראות** בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך י' טבת ה'תשע"ז, 8.1.2017.

### שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שידועים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

**שאלה 1.** חשבו את  $Z(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Q})$ .

**שאלה 2.** יהיו  $f: G \rightarrow H$  ו- $g: H \rightarrow K$  הומומורפיזמים של חבורות. הוכיחו שההרכבה  $g \circ f: G \rightarrow K$  היא הומומורפיזם.

**שאלה 3.** תהינה  $G, H$  שתי חבורות, ונסמן  $K = G \times \{e_H\}$ . הוכיחו כי  $K \cong G$  וגם  $K \triangleleft G \times H$ .

### שאלות להגשה

**שאלה 4** (ממבחן). תהי  $G$  חבורה, ויהיו  $a, b \in G$  איברים לא טריוויאלים (כלומר שונים מאיבר היחידה) המקיימים  $aba^{-1} = b^2$ .

א. הוכיחו כי  $a^5ba^{-5} = b^{32}$ .

ב. נניח כי  $o(a) = 5$ . מצאו את  $o(b)$ .

**שאלה 5.** מצאו כמה הומומורפיזמים  $f: \mathbb{Z}_{49} \rightarrow S_9$  קיימים. האם קיים מונומורפיזם?

**שאלה 6.** מצאו דוגמאות לשתי חבורות לא אבליות מסדר 216 והוכיחו שאינן איזומורפיות.

**שאלה 7.** תהי  $G$  חבורה, ותהי  $H \leq G$  תת-חבורה. נגדיר את הפערפל (או הנורמליזטור) של  $H$  ביחס ב- $G$  להיות

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gH = Hg\}$$

א. הוכיחו כי  $N_G(H) \leq G$ .

ב. הוכיחו כי  $H \triangleleft N_G(H)$ , ומצאו דוגמה בה  $N_G(H)$  אינה תת-חבורה נורמלית של  $G$  (רמז: חבורה מסדר 6 תספיק).

ג. הוכיחו  $H \triangleleft G$  אם ורק אם  $N_G(H) = G$ . חשבו את  $N_G(Z(G))$ .

**שאלה 8.** תהי  $G$  חבורה שבה לכל  $x, y \in G$  מתקיים  $(xy)^{2017} = x^{2017}y^{2017}$ . נסמן שלוש תת-קבוצות

$$\begin{aligned} A &= \{g^{2017} \mid g \in G\} \\ B &= \{g^{2016} \mid g \in G\} \\ C &= \{g \mid g \in G, g^{2017} = e\} \end{aligned}$$

א. הוכיחו  $A, B, C \triangleleft G$ . צריך להוכיח שהן תת-חבורות, וגם שהן נורמליות.

ב. הוכיחו שכל איברי  $A$  מתחלפים עם כל איברי  $B$ . באופן שקול, הוכיחו שלכל  $x, y \in G$  מתקיים  $x^{2017}y^{2016} = y^{2016}x^{2017}$ .

ג. הוכיחו שלכל  $g, h \in G$  מתקיים

$$(ghg^{-1}h^{-1})^{2017 \cdot 2016} = e$$

## שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

**שאלה 9.** כמסקנה ממשפט קיילי כל חבורה  $G$  מסדר  $n$  איזומורפית לתת-חבורה של  $S_n$ .

א. מצאו שיכון  $f: Q_8 \rightarrow S_8$ . זה יותר קשה להראות ש- $Q_8$  אינה ניתנת לשיכון ב- $S_7$ .

ב. מצאו שיכון  $f: D_n \rightarrow S_n$ . שימו לב שלא מדובר ב- $S_{2n}$ .

**שאלה 10.** נתונות החבורות הבאות מסדר 24:  $S_4, \mathbb{Z}_{24}, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_4 \times S_3, \mathbb{Z}_4 \times D_4, \mathbb{Z}_3 \times Q_8, \mathbb{Z}_2 \times A_4, D_{12}$  ו- $SL_2(\mathbb{Z}_3)$  (מטריצות  $2 \times 2$  עם דטרמיננטה 1 מעל השדה בן שלושה איברים). בחרו כמה מהן והוכיחו שאף אחת מהן לא איזומורפית לאחרות שבחרתן. רמז: סדר של איברים.

אגב, ישנן 15 חבורות מסדר 24 עד כדי איזומורפיזם. האם אתם יכולים להוסיף עוד כמה לרשימה?

בהצלחה!