תרגול 9: תמורות – המשך

משפט: כל תמורה ב- S_n אפשר להציג כמכפלה של חילופים למשל:

$$(a_1\, a_2 \quad a_3 \quad \ldots \quad a_k) = (a_1 \quad a_k)(a_1 \quad a_{k-1})\cdots(a_1 \quad a_2)$$

(בתמורה כללית פשוט מפרקים למחזורים זרים, ואז מפרקים כל מחזור זר לחילופים.)

דוגמא: $\left(1 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2\right) = (1 \quad 2)(1 \quad 3)(1 \quad 4)(1 \quad 5)$

מסקנה: קבוצת החילופים ב S_n יוצרת את S_n.

הגדרה: היפוך (או **הפרת סדר**) בתמורה הוא זוג $i < j$ כך ש $\pi(j) < \pi(i)$

דוגמא: $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ כמה היפוכים יש בתמורה S ?

תשובה:

היפוך 1: 2 ו 3 היפוך 2: 4 ו 5 היפוך 3: 4 ו 6 לכן סך הכל יש ב S 3 היפוכים.

איך מחשבים את מספר ההיפוכים בקלות?

נמחק את השורה הראשונה של התמורה, ונישאר עם השורה השנייה בלבד: 132645.

נתחיל משמאל, ונבדוק האם מימינו של 1 יש מספרים הקטנים ממנו: כמובן שאין.

אח"כ נבדוק האם מימינו של 3 יש מספרים הקטנים ממנו: יש אחד כזה והוא 2, לכן נוסיף 1 למספר היפוכי הסדר.

אח"כ נבדוק האם מימינו של 2 יש מספרים הקטנים ממנו: אין.

אח"כ 6: 4,5 קטנים ממנו, ולכן מוסיפים 2 למספר ההיפוכים.

אח"כ 4: אין. אח"כ 5: אין. סה"כ קיבלנו 3 היפוכי סדר.

תרגיל בית:

1. מצאו את מספר ההיפוכים בתמורה: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
2. הסבירו מדוע האלגוריתם שהצגנו בדוגמא לחישוב מספר ההיפוכים באמת עובד.

<u>סימון:</u> מס' ההיפוכים בתמורה S יסומן ע"י $Inv(S)$

<u>! הגדרה:</u> **סימן של תמורה** יוגדר ע"י $sign(S)=(-1)^{Inv(S)}$

אם $sign(S)=1$ התמורה תקרא תמורה זוגית ואם $sign(S)=-1$ התמורה תקרא תמורה אי זוגית.

<u>תרגיל בית:</u> הראו ש $sign(\pi)=\prod_{i<j}\frac{\pi(j)-\pi(i)}{j-i}$.

<u>! משפט:</u> $sign:S_n\to\{-1,1\}$ הוא הומומורפיזם של חבורות.

<u>! מסקנה:</u>

תמורה זוגית*תמורה זוגית= תמורה זוגית

תמורה אי-זוגית*תמורה זוגית= תמורה אי-זוגית

תמורה אי-זוגית*תמורה אי-זוגית= תמורה זוגית

(מציבים במקום זוגי 1 ובמקום אי זוגי 1- ומשווים את התוצאה)

בגלל שהומ' מעביר יחידה ליחידה, נקבל שתמורת הזהות היא תמיד זוגית (ניתן לראות זאת גם לפי מספר ההיפוכים).

<u>סימון</u>: את קבוצת התמורות הזוגיות אנו מסמנים ב A_n .

<u>משפט:</u> $A_n\lhd S_n$

<u>"הוכחה":</u> הגרעין של העתקת הסימן $sign:S_n\to\{-1,1\}$ היא בדיוק קבוצת התמורות הזוגיות.

<u>משפט:</u> S_n חצי מהתמורות זוגיות וחצי אי זוגיות.

<u>הוכחה:</u> כאמור, $sign:S_n\to\{-1,1\}$ אפימורפיזם.

לפי איזו 1, $S_n/A_n\cong\mathbb{Z}_2$.

נקבל כעת לפי לגרנג' נקבל $|S_n/A_n|=2\Rightarrow|A_n|=\frac{|S_n|}{2}=\frac{n!}{2}$.

<u>תרגיל בית:</u> הראו שאם $\pi \in S_n$ היא תמורה אי-זוגית, אזי πA_n היא קבוצת כל התמורות האי-זוגיות. האם קבוצת התמורות האי-זוגיות היא ת"ח?

<u>משפט:</u> A_n נוצרת ע"י מחזורים באורך 3.

<u>הגדרה:</u> **מבנה מחזורים** של תמורה הוא קבוצת אורכי המחזורים של תמורה מסודרים מהגדול לקטן.

<u>דוגמא:</u> מבנה המחזורים של $(6\ \ 7\ \ 8)(4\ \ \ 6\ \ \ 5)(2\ \ \ 3)$ הוא 3,3,2.

<u>תרגיל:</u> לתמורה ולהפכית שלה יש אותו מבנה מחזורים.

<u>פתרון</u>: כבר ראינו שהתמורה ההפכית היא פשוט המחזורים כתובים הפוך ...

<u>הצמדה של תמורות:</u>

<u>הגדרה:</u> תהי G חבורה, $g_1, g_2 \in G$. נאמר ש g_1 **צמוד** ל g_2 אם קיים $x \in G$ כך ש: $xg_1x^{-1} = g_2$.

<u>הערה (קריטריון הנורמליות)</u>: למעשה ראינו כבר את החשיבות של פעולת ההצמדה כשדיברנו על תח"נ. ראינו שתח"נ היא ת"ח אם ורק אם היא **סגורה תחת פעולת ההצמדה**. כלומר:

$$H \triangleleft G \Leftrightarrow \forall g \in G, \forall h \in H, ghg^{-1} \in G.$$

<u>משפט:</u> יחס הצמידות היינו יחס שקילות.

<u>הגדרה:</u> בהנתן איבר ניתן להסתכל על מחלקת השקילות שלו תחת היחס הזה. מחלקת השקילות היא קבוצת כל האיברים שצמודים לאיבר זה. כל מחלקת שקילות כזאת נקראת **מחלקת צמידות**. שני איברים הם **צמודים** אם הם נמצאים באותה מחלקת צמידות.

<u>סימון:</u> $x \in G$, $conj(x)$ הינו מחלקת הצמידות המכילה את x. כלומר: $conj(x) = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}$.

<u>משפט:</u> כל תח"נ של חבורה G היא איחוד זר של מחלקות צמידות.

בהנתן שתי תמורות $\sigma, \pi \in S_n$ ברצוננו לחשב את ההצמדה $\pi\sigma\pi^{-1}$. כך נוכל לבדוק אילו ת"ח של S_n הן נורמליות.

נשים לב שאפשר להניח ש σ היא מחזור בודד, כיוון ש:

$\pi\sigma\pi^{-1} = \pi(...)(...)...(...)\pi^{-1} = \pi(...)\pi^{-1}\pi(...)\pi^{-1}\pi...\pi^{-1}\pi(...)\pi^{-1}$ (כלומר מצמידים תמורה מחזור אחר מחזור).

דוגמא: נראה הצמדה של המחזור (1 2 3) ע"י המחזור (1 2):

$(1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2)=(1\ 3\ 2)=(213)$.

מה קיבלנו? שימו לב שלקחנו את המחזור (1 2 3) ופשוט הפעלנו על איבריו את התמורה $\pi=(1\ 2)$. כלומר $(1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2)=(\pi(1)\ \pi(2)\ \pi(3))=(2\ 1\ 3)=(123)$.

טענה: נראה שזה המקרה הכללי, כלומר אם $\sigma=(i_1\ i_2\ \dots\ i_k)$ אזי:

$$(*)\qquad \pi\sigma\pi^{-1}=\pi(i_1\ i_2\ \dots\ i_k)\pi^{-1}=(\pi(i_1)\ \pi(i_2)\ \dots\ \pi(i_k)) .$$

הוכחה: בכתיב הפונקציונלי של תמורות שהצגנו קודם , קל לראות ש $\sigma(i_j)=i_{j+1\,(\mathrm{mod}\,k)}$ (כלומר התמונה של i_j היא האיבר שיושב מימינו במחזור). במילים אחרות, האיבר שיושב לימינו של i במחזור הוא $\sigma(i)$.

טריק: נבדוק מי יושב לימינו של $\pi(j)$ במחזורים של $\pi\sigma\pi^{-1}$. נבדוק זאת פשוט ע"י הפעלת התמורה: $\pi\sigma\pi^{-1}(\pi(j))=\pi(\sigma(j))$. כלומר מי שיושב לימינו של $\pi(j)$ הוא $\pi(\sigma(j))=\pi(j+1)$. התבוננות זהירה תראה לנו שזה בדיוק מה שרצינו להוכיח , כלומר קיבלנו את (*).

טענה: גם הכיוון ההפוך נכון, כלומר בהנתן שתי תמורות בעלות אותו מבנה מחזורים , קיימת תמורה המצמידה אותן.

הוכחה:

נראה שוב את המקרה של מחזורים. בהנתן שני מחזורים באותו אורך:

$$\sigma=(i_1\ i_2\ \dots\ i_k)$$
$$\tau=(j_1\ j_2\ \dots\ j_k)$$

פשוט נצמיד ע"י התמורה הבאה:

$$\pi=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}$$

משפט: S_n שתי תמורות צמודות אם"ם יש להם אותו מבנה מחזורים.

מסקנה: כל תמורה צמודה להפכית שלה.

הערה: בהנתן שתי תמורות צמודות, לא בהכרח יש יחידות של האיבר המצמיד אחת לשנייה . לדוגמא ידוע ש- $\tau=(1\ 2\ 3)$ צמודה להפכית שלה $\tau^{-1}=(2\ 1\ 3)$. ניתן להגיע מאחת לשנייה ע"י כל אחת מהתמורות הבאות: $(1\ 2),(2\ 3),(1\ 2)$.

דוגמא: בהנתן שתי תמורות $b=(1579)$ $a=(135)(12)$, מצאו את: $a^{-1}ba$.

פתרון: נשים לב שאנחנו לא מצמידים ב a אלא ב a^{-1} . לכן לפי הטענה הנ"ל, כדי לחשב את $a^{-1}ba$ צריך פשוט להפעיל את $a^{-1}=(1\ 2)(1\ 5\ 3)$ על אברי b : כלומר

$$a^{-1}ba=(a^{-1}(1)\ a^{-1}(5)\ a^{-1}(7)\ a^{-1}(9))=(5\ 3\ 7\ 9)\ .$$

שאלה: כמה מחלקות צמידות יש ב S_3?

תשובה: מבנים אפשרים:

3,21,111 כלומר ב S_3 יש שלוש מחלקות צמידות.

תרגיל: מיהן כל הת"ח הנורמליות ב S_3?

פתרון: נראה שידיעת מחלקות הצמידות מקלה על מציאת תח "נ:

לפי לגרנג', פרט לתח"נ הטריוויאליות $\{e\},S_3$, תח"נ בהכרח מסדר 2,3.

בהנתן איבר $\pi\in N\triangleleft S_3$ אנחנו יודעים שגם כל הצמודים שלו נמצאים ב- N.

אם N מסדר 3, היא ציקלית ולכן מכילה מחזור מסדר 3, ואז כל המחזורים מסדר 3 הם ב N. אזי N היא בהכרח $\{e,(123),(213)\}$. ואכן N נורמלית כי היא סגורה תחת הצמדה.

(ניתן לראות שהיא נורמלית גם מכך שהאינדקס שלה הוא 2).

אם N מסדר 2, אזי היא מכילה חילוף, אבל אם היא מכילה חילוף, היא מכילה את כל החילופים, וכיוון שהחילופים יוצרים את S_3 נקבל ש $S_3=N$.

שאלה: כמה מחלקות צמידות יש ב S_4?

תשובה: מבנים אפשרים:

4
31
22
2111
1111

כלומר ב S_4 יש 5 מחלקות צמידות.

תרגיל: מיהן כל הת"ח הנורמליות ב S_4?

תשובה:

אם $\pi \in N \lhd S_4$, אנחנו יודעים שגם כל הצמודים שלו נמצאים ב- N.

אם N אינה תח"נ טריוויאלית, אזי לפי לגרנג' סידרה הוא בהכרח 2,3,4,6,8 או 12.

אם N מכילה איבר מהצורה (4 3)(2 1) אזי היא מכילה את הת"ח (בדקו שזאת אכן ת"ח)
$K=\{e,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$. ת"ח זאת איזומורפית לחבורת קליין (הוכיחו).

K נורמלית, כיוון שהיא סגורה תחת הצמדה.

אם N מכילה חילוף, אזי היא מכילה את כל החילופים , ואלה יוצרים את כל S_4 ואז $S_4=N$.

אם N מכילה מחזור מסדר 3, אזי הוא מכיל את כל המחזורים מאורך 3, ואלה יוצרים את A_4 , ולכן $A_4 \le N \lhd S_4$
, זה אפשרי רק אם $S_4=N$ או $A_4=N$ כי אין מחלקים נוספים של 24 הגדולים מ 12.

אם N מכילה מחזור מאורך 4, אזי היא מכילה את כולם. נשים לב ש

(1 4 3)=(2 1 3 4)(1 2 3 4), ולכן N מכילה גם את (1 4 3), ולכן N מכילה את A_4 ממש ולכן בהכרח $S_4=N$.

הגדרה: חבורה נקראת פשוטה אם אין לה תח"נ לא טריוויאליות.

משפט: לכל $n \ge 5$ $A_n \lhd S_n$ היא התח"נ היחידה של S_n .

משפט גלואה: A_n פשוטה לכל $n \ge 5$.

הערה: משפט גלואה לא נובע מהמשפט הקודם לו, בגלל חוסר טרנזיטיביות של נורמליות. כלומר אם
$H \lhd A_n \lhd S_n$ זה לא אומר ש $H \lhd S_n$.

תרגיל ממבחן תשס"ח:

נניח שקיים אפימורפיזם מ- A_6 לחבורה G . מצא את G

(מיין את האפשרויות עד כדי איזומורפיזם) .

פתרון: לפי משפט איזו' 1, $G\cong A_6/Ker\varphi$. אבל $Ker\varphi \lhd A_6$, וכיוון ש A_6 פשוטה (לפי משפט גלואה), נקבל ש $Ker\varphi=\{e\}$ או $Ker\varphi=A_6$, ולכן $G\cong A_6,\{e\}$

תרגיל: הראו שב A_4 אין ת"ח מסדר 6.

הוכחה: אפשר כמובן למצוא את כל הת"ח ב A_4 או להשתמש בשיקולי סדר ומשפט לגרנג', אך יותר קל להשתמש בתכונות של מחלקות הצמידות. נשים לב שאם H ת"ח מסדר 6 אז $[A_4:H]=2$ ולכן H ת"ח נורמלית של A_4 . ראינו בתרגול קודם שבכל חבורה מסדר זוגי יש איבר מסדר 2, ולכן קיים ב H איבר מסדר 2, והוא בהכרח מהצורה (ij)(kl) (הסבירו מדוע!). לכן כל האיברים מהצורה הנ"ל נמצאים ב H כיוון שכל מחלקת הצמידות של (ij)(kl) מוכלת ב H. לכן $K=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}\subset H$. קל לבדוק ש $K\le H$ שאיזומורפית לחבורת קליין ($\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$). אבל זאת ת"ח מסדר 4 בתוך חבורה מסדר 6, ונקבל סתירה למשפט לגרנג' (הסבירו מדוע!).

תת-קבוצות יוצרות של S_n:

ראינו קודם שקבוצת החילופים ב- S_n היא קבוצה שיוצרת את כל החבורה. כלומר כל תמורה ניתנת להצגה כמכפלה של חילופים.

נראה כעת מספר קבוצות יוצרים נוספות:

א. נראה שקבוצת החילופים $(1,2),(1,3),...,(1,n)$ יוצרת את S_n. מספיק להראות שניתן בעזרת החילופים הנ"ל ליצור את כל החילופים. נרצה לבנות תמורה α מהחילופים הנ"ל שעבור יתקיים $\alpha(1,j)\alpha^{-1}=(\alpha(1),\alpha(j))=(i,j)$. נשים לב ש $(1,i)(1,j)(1,i)=(i,j)$.

ב. חילופים סמוכים: $(1,2),(2,3),...,(i,i+1),...,(n-1,n)$. נרצה לבנות את כל החילופים מסעיף א.
$(1,j)=(1,2)(2,3)...(j-2,j-1)(j-1,j)...(2,3)(1,2)$.

ג. התמורות: $(1,2),(1,2,...,n)$. נראה שניתן ליצור את כל החילופים הסמוכים מסעיף ב. נשים לב שמ- $(1,2,...,n)$ ניתן ליצור את $(1,2,...,n)^{-1}=(1,2,...,n)^{n-1}$. כעת נסמן $\alpha=(1,2,...,n)$. אזי
$\alpha(1,2)\alpha^{-1}=(2,3),\quad \alpha(2,3)\alpha^{-1}=(3,4),...$.