סמסטר א' תשע"א

<u>תרגיל מס' 1 - חדו"א 1</u>

1. פתרו את אי־השיוויונים הבאים:

(א) $|2x-1| < |x-1|$

(ב) $|x(1-x)| < 0.05$

(ג) $\big|\, |x+1| - |x-1| \,\big| < 1$

(ד) $|\sin x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$

(ה) $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1} \geq \sqrt{3x-2}$

2. יהי $\varepsilon > 0$. הוכיחו כי אם מתקיים $|x-a| < \varepsilon$ וגם $|y-b| < \varepsilon$ אזי

$$|xy - ab| < \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon)$$

3. כתבו את $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, A^c, B^c עבור $A = (-\infty, 1] \cup (3,5)$, $B = [0,4)$.

4. הוכיחו כי המספרים הבאים הם <u>אי־רציונליים</u>:

(א) $\sqrt[3]{3}$

(ב) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$

(ג) $\sqrt{k}$ כאשר $k \in \mathbb{N}$, וכן k אינו ריבוע של מספר שלם. רמז: כל מספר טבעי ניתן לרשום כמכפלה $k = p_1^{r_1} \cdots p_m^{r_m}$ כאשר ה־p_i־ים הם מספרים ראשוניים.

(ד) ★ $0.12345678910111213\cdots$ (כל המספרים הטבעיים רשומים ברצף)

5. (א) האם קיימים מספרים <u>רציונליים</u> a, b כך ש־ $a+b$ <u>אי־רציונלי</u>?

(ב) האם קיימים מספרים <u>אי־רציונליים</u> c, d כך ש־ $c+d$ <u>רציונלי</u>?

(ג) ★ האם קיימים מספרים <u>אי־רציונליים</u> α, β כך ש־ α^β <u>רציונלי</u>?

6. הוכיחו כי אם $a + \frac{1}{a}$ מספר שלם, אז גם $a^3 + \frac{1}{a^3}$ מספר שלם.

7. הוכיחו את אי־השיוויונים הבאים ומצאו תנאי הכרחי ומספיק לקיום שיוויון:

(א) $|x| + |y| \geq |x-y| \geq \big|\, |x| - |y| \,\big|$ לכל x, y

(ב) $\left|a + \frac{1}{a}\right| \geq 2$ לכל $a \neq 0$

(ג) $\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ לכל $x, y > 0$

(ד) $|a-1| + |a-2| + |a-3| \geq 2$ לכל a

8. ★ נתון כי המספרים $a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}$ מהווים סידרה חשבונית. הוכיחו כי

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 a_{n+1}}$$

9. הוכיחו באינדוקציה (או בדרך אחרת):

(א) $\sum_{k=1}^{n} k^2 \left(= 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ לכל n טבעי.

(ב) אי־שיוויון Bernoulli:

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

לכל $x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

(ג) ★ $n^{n+1} > (n+1)^n$ לכל $n \geq 3$.

(ד) $7^n + 12n + 17$ מתחלק ב־ 18 לכל n טבעי.

(ה) ★ $\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ לכל n טבעי ולכל $x, y \geq 0$.

(ו) לכל n טבעי מתקיים: $2(\sqrt{n+1} - 1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1$.

10. יהיו $a, b, c > 0$ המקיימים $a + b + c = 1$. הוכיחו כי $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$.

11. הוכיחו את הזהות הטריגונומטרית $\sin(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$.

12. הוכיחו או הפריכו (כל המספרים ממשיים אלא אם נאמר אחרת):

(א) $\forall \epsilon > 0 \; \exists x : \; \forall y \; |x - y| < \epsilon$

(ב) $\exists \epsilon > 0 : \; \forall x, y \; |x - y| \geq \epsilon$

(ג) $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists x > n : \; x < \sqrt{x}$

(ד) $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists x \leq n : \; x \geq \sqrt{x} \; \wedge \; x > 0$

13. בשאלה זו נוכיח את אי־השיוויונות הבאים: $\frac{4^n}{2n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n$ הדרכה: הוכיחו תחילה כי מתקיים

$$\binom{2n}{0} \leq \binom{2n}{1} \leq \ldots \leq \binom{2n}{n}$$

אחר כך, הוכיחו כי לכל $0 \leq k \leq n$ מתקיים $\binom{2n}{n+k} = \binom{2n}{n-k}$, והסיקו כי מתקיים

$$\binom{2n}{2n} \leq \binom{2n}{2n-1} \leq \ldots \leq \binom{2n}{n}$$

כעת, השתמשו בנוסחת הבינום עבור $(1+1)^{2n}$ והוכיחו את אי־השיוויונות המבוקשים.

סמסטר א' תשע"א

תרגיל מס' 2 - חדו"א 1

1. הוכיחו כי פונקצית דיריכלה (Dirichlet) המוגדרת ע"י

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

מחזורית, איך אין לה מחזור קטן ביותר.

2. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם f זוגית, ו־g אי־זוגית אז $f \cdot g$ אי־זוגית. מה לגבי $f + g$?

(ב) הפונקציה $\sqrt[n]{1 - x^n}$ הפיכה עבור $x \in [0, 1]$.

(ג) אם f עולה, g יורדת, אז $f \circ g$ יורדת.

3. ★ תהי f פונקציה המוגדרת בקטע $[-a, a]$. הוכיחו כי קיימות פונקציה זוגית f_1 ופונקציה אי־זוגית f_2 יחידות כך ש־ $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ לכל $x \in [-a, a]$.

הדרכה: הניחו כי קיימות f_1, f_2 כנ"ל והסתכלו על $f(x)$ ו־ $f(-x)$. קבלו מערכת משוואות עבור $f_1(x), f_2(x)$ ופתרו אותה.

4. עבור כל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו האם הן חסומות מלעיל/מלרע. כמו כן, חשבו sup, inf, ומצאו max, min במידה והם קיימים, או הראו מדוע הם אינם קיימים

(א) $A = \{\frac{1}{n} + (-1)^n, |, n \in \mathbb{N}\}$.

(ב) $B = \{\frac{n-1}{n+1}\cos(\frac{2n\pi}{3}), |, n \in \mathbb{N}\}$

(ג) $C = \{x^2 + x + 1, |, x \in (0, \infty)\}$

(ד) ★ $D = \{\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor, |, n \in \mathbb{N}\}$, כאשר $\lfloor m \rfloor$ הוא החלק השלם של m.

5. $A, B \subset \mathbb{R}_+$ (קבוצות של מספרים אי־שליליים) חסומות מלמעלה. הוכיחו כי

$$sup(A \times B) = sup(A) \cdot sup(B)$$

כאשר $A \times B = \{x \cdot y |\, x \in A,\, y \in B\}$.

6. תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$ לא ריקות כך ש־ $A \subseteq B$. הוכיחו כי

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$

7. תהיינה f, g פונקציות חסומות בקטע $[a, b]$. הוכיחו כי

$$\sup_{a \leq x \leq b} \big(f(x) + g(x)\big) \leq \sup_{a \leq x \leq b} f(x) + \sup_{a \leq x \leq b} g(x)$$

והראו (ע"י דוגמא) כי ייתכן שאין שיוויון.

הערה: הסופרמום של $f : A \to B$ מוגדר על ידי: $\sup f := \sup\{f(x) | x \in A\}$.

8. תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$ קבוצות לא ריקות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) "אם ל־ A אין איבר מקסימלי אז A קבוצה אינסופית (בעלת אינסוף איברים)".

(ב) "אם A אינסופית ללא איבר מינימלי אז A איננה חסומה".

(ג) "אם A, B חסומות ו־ $\sup A = \inf B$ אז $A \cap B$ מכילה בדיוק איבר אחד".

(ד) "אם A, B חסומות ו־ $A \cap B = \emptyset$ (כלומר A, B זרות) אז $\sup A \neq \sup B$".

(ה) "אם $A \subset B$ ו $|A| = \infty$, $|B \setminus A| = \infty$ אזי $\sup B > \sup A$".

הערה: אם הטענה נכונה יש להוכיח אותה, אחרת יש להפריך אותה ע"י מתן דוגמא נגדית.

9. נתונה הקבוצה: $A = \{(1+\frac{1}{n})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. הוכיחו כי $2 < \sup A < 3$. האם קיים מקסימום לקבוצה A? אפשר להשתמש ברמזים הבאים:

(א) חשבו תחילה את הסכום: $\sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{2^k}$.

(ב) הראו כי לכל $k \geq 2$ מתקיים $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$.

(ג) הראו כי: $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} \leq 2\frac{11}{12}$.

(ד) כעת באמצעות נוסחאת הבינום הראו: $(1+\frac{1}{n})^n < \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$

(ה) הראו כי $(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{2n})^{2n}$ והעזרו בכך כדי לקבוע עם יש מקסימום.

10. מצאו ביטוי התלוי ב־ n ושאינו מכיל את הסימנים $\prod, \sum$ עבור:

(א) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}$

(ב) $\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2}$

(ג) $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

(ד) $\sum_{k=0}^{2n} \binom{4n}{2k}$

11. ★ ★ הוכיחו את אי־שיוויון צ'בישב: נתונים מספרים חיוביים המקיימים $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ וגם $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$. אזי מתקיים:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

רמז: פתחו את הביטוי $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i - a_j)(b_i - b_j)$.

סמסטר א' תשע"א

תרגיל מס' 3 - חדו"א-1

1. תהי $\{a_n\}$ סדרה. הוכיחו או הפריכו על ידי מתן דוגמא נגדית את הטענות הבאת:

א) אם קיים מספר ממשי A ומספר טבעי M כך שלכל $n>M$ טבעי ולכל $\varepsilon>0$ מתקיים $|a_n - A| < \varepsilon$ אזי לסדרה יש גבול.

ב) אם לכל מספר x ממשי מקיים $\varepsilon>0$ וגם N טבעי כך שלכל $n\geq N$ מתקיים $|a_n - x| < \varepsilon$, אזי הסדרה מתכנסת.

2. יהי $a_n = n^{(-1)^n}$. הוכיחו כי הסדרה $\{a_n\}$ איננה חסומה אך גם לא שואפת ל- ∞.

3. הוכיחו לפי הגדרת הגבול (כלומר בשפת "$\varepsilon - N$") :

א) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4} = \frac{1}{3}$;

ב) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 - \cos(n)} - n = 0$;

ג) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n!)}{\sqrt[3]{n}} = 0$;

* ד) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ כאשר $c>0$.

4. הוכיחו לפי הגדרת הגבול כי הסדרות הבאות אינן מתכנסות:

א) $a_n = \frac{n}{n+1}(1+\cos(\pi n))$;

ב) $a_n = (-1)^n + \frac{3}{n}$;

ג) $a_{3k} = 0$; $a_{3k+1} = 1$; $a_{3k+2} = 2$.

*5. האם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} \sin(n)$? נמק את תשובתך היטב !

6. א) תהי $\{a_n\}$ סדרה עבורה קיים $0 \leq \alpha < 1$ כך ש- $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \alpha$ לכל n.

הוכיחו ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

ב) תהי $\{a_n\}$ סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l < 1$.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. (רמז: השתמשו בסעיף א').

ג) תהי $\{a_n\}$ סדרה המקיימת $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ לכל n. האם בהכרח מתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?

ד) יהי a ממשי כלשהו ו- $|h| < 1$. נסמן $a_n = n^a h^n$. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(הדרכה: השתמשו בסעיף ב').

7. חשבו $\lim_{n\to\infty} a_n$ כאשר:

א) $a_n = \frac{1000n}{n^2-2}$; ב) $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-1}$;

ג) $a_n = \sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt[3]{n^3+1}$;   ד) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}$;

ה) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}$;   ו) $a_n = \frac{n!}{(n+1)\times(n+2)\times\ldots\times(2n)}$;

* ז) $a_n = \frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}$;   ח) $a_n = \frac{(\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n^3+n}+n)}{\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^3}}$;

ט) $a_n = \frac{2^n+3^n}{3\times2^{n+1}+2\times3^{n-1}}$;   * י) $a_n = (n^5-2n+7)^{\frac{1}{n+2}}$;

8. א) נתון ש- $\{a_n\}$ סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty} {a_n}^2 = a$. האם בהכרח קיים $\lim_{n\to\infty} a_n$?

ב) נניח ש- $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$. הוכיחו שהסדרה : $\{x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots\}$ מתכנסת וגבולה שווה ל- a .

ג) נתון ש- $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$. האם בהכרח לפחות אחת מהסדרות $\{b_n\}$, $\{a_n\}$ שואפת ל- 0 ?

ד) (i) נתון: $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$. הוכיחו ש- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

(ii) מה יתכן במקרה (i) ש - $a = 0$? תנו דוגמאות.

*ה) נתון ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}$.

9. הוכיחו או הפריכו על ידי מתן דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

א) קיימת סדרה $\{a_n\}$ כך שמתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ וכן $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n^2} = 0$.

ב) אם $(a_{n+1}^2 - a_n^2) \to 0$ וגם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ אזי קיים גבול $\lim_{n\to\infty} a_n$.

*10. נתון שסדרה חיובית $\{a_n\}$ מקיימת את אי-השוויון: $a_n^2 \le a_n - a_{n+1}$ לכל $n \in N$. הוכיחו:

א) הסדרה מתכנסת;

ב) לכל $n \in N$ מתקיים : $a_n < \frac{1}{n}$. (רמז: אפשר להשתמש באינדוקציה.)

ב ה צ ל ח ה !

סמסטר א' תשע"א

תרגיל מס' 4 - חדו"א 1

1. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) אם $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ אזי $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ (מה לגבי הכיוון ההפוך?)

(ב) אם $\{a_n\}$ סדרה חסומה ו- $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ אזי $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

(ג) אם הסדרה a_n מתבדרת ל-∞, והסדרה b_n מתכנסת או מתבדרת ל-∞, אזי הסדרה $a_n + b_n$ מתבדרת ל-∞

(ד) נניח ש- $a_n \geq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n$ אזי מתקיים $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}$

(ה) נניח ש- $a_n \geq 0$ ובנוסף מתקיים ש- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p < 1$ אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
רמז: הראו שלכל $\epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $a_n \leq (\epsilon + p)^n$.

2. חשבו בעזרת "משפט הסנדוויץ'":

(א) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot\sin 1 + 2\cdot\sin 2 + \cdots + n\cdot\sin n}{n^3}$$

(ב) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$ כאשר $a > b > 0$.

(ג) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{10^n}$$

(ד) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}\right)$$

(ה) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}\right)$$

3. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n}\right)^{2n^2+3n}$$

(ב) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-n}{n^2+1}\right)^{n+10}$$

4. עבור שני מספרים חיוביים a_1, b_1 נגדיר שתי סדרות באופן הבא:

$$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2},\ b_2 = \sqrt{a_1\cdot b_1}, \ldots\ a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2},\ b_{n+1} = \sqrt{a_n\cdot b_n}$$

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$

5. הוכיחו כי הסדרות הבאות מתכנסות וחשבו את גבולותיהן:

(א) $x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = x_n(2 - x_n)$

(ב) $x_1 = \sqrt{6}, \quad x_{n+1} = \sqrt{6 \cdot x_n}$

(ג) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n}$

(ד) $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{4(1 - a_n)}$

6. (א) תהי $\{a_n\}$ סידרה כך ש־ $a_n > 0$ לכל n. נתון כי הסידרה מתכנסת ל־ a, סופי או אינסופי. נסמן $b_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$. הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

הדרכה: השתמשו במשפט על גבול ממוצע חשבוני, באי־שיוויון הממוצעים ובמשפט הסנדוויץ'!

(ב) בעזרת סעיף א' הוכיחו כי אם $x_n > 0$ לכל n ו־ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L$, סופי או אינסופי, אז $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = L$.

(ג) בעזרת סעיפים א' ו־ב' חשבו

i. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p(n)}$ כאשר $p(n)$ פולינום כלשהוא במשתנה n.

ii. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$

iii. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{2^{3n} \cdot n! \cdot (2n)!}}$

iv. ★ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

7. הוכיחו כי הסדרות הבאות מתכנסות:

(א) $a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \cdots + \frac{1}{3^n+1}$

(ב) $b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$

(ג) $c_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}$

(ד) ★ $d_n = 2^n \sin \frac{\pi}{2^n}$ (לא להשתמש ב־ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)

8. (אין קשר בין הסעיפים בשאלה זו)

(א) ★ יהיו $a_0, a_1, \cdots, a_k$ מספרים ממשיים כך ש־ $a_0 + a_1 + \cdots + a_k = 0$.
הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + \cdots + a_k\sqrt{n+k}\right) = 0$.

(ב) ★ חשבו $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{n+k}{n^2}$

(ג) ★ חשבו $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^k}{n^n}$

חדו"א 1א - תרגיל בית מס' 5

1. הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול:

$$a_1 = a > 0, \quad a_{n+1} = 3 \cdot \frac{a_n - 1}{a_n + 3}$$

2. פיתרו את השאלות הבאות:

(א) נתונה סדרה $\{a_n\}$ כך ש $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, וסדרה חיובית $\{b_k\}$ המקיימת $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \infty$. הוכיחו כי: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right) / \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right) = a$.

(ב) הוכיחו את הגרסא הבאה של משפט שטולץ: תהי $\{x_n\}$ סדרה כלשהי ותהי $\{y_n\}$ סדרה עולה ממש כך ש $y_n \to \infty$ ובנוסף קיים הגבול במובן הרחב: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \infty$. אזי מתקיים: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$.

3. חשבו בעזרת משפט שטולץ (Stolz) את הגבולות הבאים:

(א) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$

(ב) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$ לכל $p \in \mathbb{N}$.

(ג) ★ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1}\right)$ לכל $p \in \mathbb{N}$.

(ד) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n}$ כאשר $a_n \to a,\ b_n \to b$ עבור $n \to \infty$.

(ה) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_1+2b_2+\ldots+nb_n}{n^3}$ כאשר $\{b_n\}$ סדרה המקיימת: $\frac{b_n}{n} \to B$ כאשר $n \to \infty$.

(ו) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lfloor 1^2\alpha \rfloor+\lfloor 2^2\alpha \rfloor+\ldots+\lfloor n^2\alpha \rfloor}{n^3}$ כאשר $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. ★ תהי סדרה חסומה המקיימת: $a_{n+1} \geq a_n - 2^{-n}$ לכל n. הראו כי הסדרה מתכנסת.

5. יהי a גבול חלקי של סדרה מונוטונית $\{a_n\}$. הוכיחו כי $a_n \to a$ כאשר $n \to \infty$.

6. תהי סדרה $\{a_n\}$ ונגדיר סדרה $\{b_n\}$ באופן הבא: $b_n = \sqrt[n]{n} \cdot a_n$. הוכיחו כי לשתי הסדרות יש את אותם הגבולות החלקיים.

7. מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות: (חשבו בנוסף את $\limsup$ ו $\liminf$):

(א) $a_n = \begin{cases} -\frac{1}{n}, & n \text{ even} \\ \frac{1}{n^2}, & n \text{ odd} \end{cases}$

(ב) $a_n = (-1)^{n+1}\left(2+\frac{3}{n}\right)$

(ג) $a_n = 1 + n\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$

(ד) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n} + (-1)^n \cdot \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\pi n^2\right)}{2+\sin\left(\frac{1}{2}\pi n^2\right)}$

8. ★ תהי $\{a_n\}$ סדרה כך ש $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} - a_n = 0$. הראו כי קבוצת הגבולות החלקיים שלה היא הקטע $\left[\liminf\limits_{n\to\infty} a_n, \limsup\limits_{n\to\infty} a_n\right]$.

9. תהי $M \subset \mathbb{R}$ קבוצה סופית ולא ריקה. תנו דוגמא לסדרה כך ש M היא קבוצת הגבולות החלקיים שלה.

10. תהיינה $\{x_n\}, \{y_n\}$ סדרות חסומות. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) $-\limsup\limits_{n\to\infty} y_n = \liminf\limits_{n\to\infty} (-y_n)$

(ב) $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n + \limsup\limits_{n\to\infty} y_n \le \limsup\limits_{n\to\infty} (x_n+y_n) \le \limsup\limits_{n\to\infty} x_n + \limsup\limits_{n\to\infty} y_n$

11. הוכיחו כי אם תתי־הסדרות $\{a_{3n}\}, \{a_{2n-1}\}, \{a_{2n}\}$ של סדרה $\{a_n\}$מתכנסות, אזי הסדרה $\{a_n\}$מתכנסת.

12. ★ תהי $\{a_n\}$ סדרה המקיימת $|a_{n+1} - a_n| < 2$ לכל n, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \le 1$ ו $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \ge 4$. הוכיחו כי לסדרה $\{a_n\}$ לפחות שלושה גבולות חלקיים.

13. הוכיחו את הטענות הבאות או מצאו דוגמא נגדית:

(א) אם $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = a$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

(ב) $\{a_n\}$ סדרה חיובית. אם $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1\cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = a$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

(ג) $\{a_n\}$ סדרה חיובית. אם $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$.

(ד) לכל סדרה לא חסומה קיים גבול במובן הרחב.

סמסטר א' תשע"א

תרגיל מס' 6 - חדו"א 1

1. הוכיחו כי הסידרה $a_n = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$ אינה מתכנסת (לגבול סופי).

2. (א) הוכיחו בעזרת קריטריון Cauchy כי אם $\{a_n\}$ מתכנסת אז $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{2n} - a_n) = 0$.

   (ב) האם הטענה ההפוכה נכונה, כלומר האם מכך ש- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{2n} - a_n) = 0$ נובע כי $\{a_n\}$ מתכנסת ?

3. תהי $\{a_n\}$ סידרה המקיימת $|a_{n+1} - a_n| \le \frac{9}{10}|a_n - a_{n-1}|$ לכל n. הוכיחו כי הסידרה מתכנסת. אם היה נתון רק ש- $|a_{n+1} - a_n| < |a_n - a_{n-1}|$ לכל n, האם הסדרה בהכרח מתכנסת?

4. בדקו האם הטורים הבאים מתכנסים או מתבדרים:

   (א) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

   (ב) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[m]{n!}}{\sqrt[k]{(2n)!}}$ כאשר $k, m \in \mathbb{N}$

   (ג) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ (<u>רמז:</u> היעזרו באי-שיוויון עבור $n!$ מהתרגול)

   (ד) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^{(2/n)}}$

   (ה) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$, כאשר $a, b \in \mathbb{R}$ ו $a, b > 0$. (<u>הערה:</u> התשובה תלויה בערכי a, b).

   (ו) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}\right)^{\alpha}$ כאשר $\alpha \in \mathbb{R}$

   (ז) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$, כאשר $\alpha > 0$.

   (ח) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^{\alpha}}$ כאשר $\alpha > 0$ ($\log \log n = \log(\log(n))$).

5. נתונים שני טורים חיוביים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ו $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ המקיימים לכל $n \ge n_0$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$. הראו כי אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ אזי גם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

6. בידקו האם הטורים הבאים מתכנסים: (<u>רמז:</u> היעזרו בשאלה 5)

(א) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-2}}{e^n n!}$ (ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n}}{e^n n!}$

7. נתון כי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ הוא טור חיובי מתכנס.

(א) הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

(ב) הראו כי הכיוון ההפוך איננו נכון באופן כללי.

(ג) נתון כי a_n סדרה מונוטונית, הראו כי הכיוון ההפוך נכון.

8. נתון כי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ הוא טור חיובי מתבדר. בכל אחד מהסעיפים קיבעו האם הטור הנתון מתכנס/מתבדר/ההתכנסות תלויה בסדרה a_n.

(א) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2 a_n}$

(ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n^2}$

(ג) ★ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n a_n}$

9. נתון כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בתנאי (כלומר $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \infty$). נגדיר $p_n = \frac{|a_n|+a_n}{2}$ ו $q_n = \frac{|a_n|-a_n}{2}$.

(א) הראו כי הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty}q_n$ מתבדרים.

(ב) נגדיר $P_n = \sum_{k=1}^{n}p_n$, $Q_n = \sum_{k=1}^{n}q_n$. הראו כי $\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n} = 1$.

10. בידקו האם הטורים הבאים מתבדרים/מתכנסים/מתכנסים בהחלט:

(א) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor n/3\rfloor}}{n}$

(ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor n/2\rfloor}}{n^2}$

(ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}}$, כאשר $a \in \mathbb{R}$.

(ד) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$

(ה) ★ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)$

11. נתון טור חיובי מתבדר $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. כמו כן נשתמש בסימון $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$. בשאלה זו נוכיח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{\beta}}$ מתכנס לכל $\beta > 1$.

(א) הראו מדוע מספיק להוכיח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n \cdot S_n^{\frac{1}{k}}}$ מתכנס לכל $k \in \mathbb{N}$.

(ב) באמצעות הזהות $x^k - y^k = (x-y)\left(x^{k-1} + x^{k-2}y + \ldots + xy^{k-2} + y^{k-1}\right)$ הראו כי מתקיים אי־השיוויון:

$$S_n^{\frac{1}{k}} - S_{n-1}^{\frac{1}{k}} \geq \frac{S_n - S_{n-1}}{kS_n^{\frac{k-1}{k}}}$$

<u>הערה:</u> היעזרו במונוטוניות של הסדרה S_n.

(ג) הסיקו כי $\sum_{n=1}^{m} \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n \cdot S_n^{\frac{1}{k}}} \leq k \left(\frac{1}{a_1^{\frac{1}{k}}} - \frac{1}{S_m^{\frac{1}{k}}} \right)$ והראו שהטור בסעיף א' מתכנס.

12. ★ בתרגיל זה נגדיר חזקות ממשיות.

(א) נוכיח כי אם $a > 0$ ו־$\{h_n\} \subset \mathbb{Q}$ כך ש־$h_n \to 0$, אז $a^{h_n} \to 1$.

(ב) נקבע $x \in \mathbb{R}$, ונגדיר $A = \{r \in \mathbb{Q} | \, r \leq x\}$, $B = \{s \in \mathbb{Q} | \, s \geq x\}$. הוכיחו שלכל $a > 0$, $\sup a^A = \inf a^B$. כאן $a^A := \{a^r | \, r \in A\}$.

(ג) נגדיר $a^x := \sup a^A$. הוכיחו כי אם $q_n \to x$, $q_n \in \mathbb{Q}$, אזי $a^{x_n} \to a^x$.

(ד) הוכיחו ש־ $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ וש־ $(a^x)^y = a^{xy}$.

סמסטר א' תשע"א

תרגיל מס' 7 - חדו"א 1

1. תנו דוגמה לכך שהגבול $\lim_{x\to\infty} f(x)$ אינו קיים, אבל $\lim_{n\to\infty} f(n)$ (כאשר $n \in \mathbb{N}$) קיים. האם יתכן המצב ההפוך?

2. הוכיחו את קיום הגבולות הבאים לפי הגדרת הגבול של היינה:

(א) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x+4}{x^2-6} = -3$

(ב) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x-1}{x-1} = 1$

3. הוכיחו את קיום הגבולות הבאים לפי הגדרת הגבול של קושי:

(א) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$

(ב) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{1/x} = 1$

(ג) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{2}{3}$

4. חשבו את הגבולות החד־צדדיים הבאים:

(א) $\displaystyle\lim_{x\to 2-} \frac{2}{8-x^3}$

(ב) $\displaystyle\lim_{x\to 3+} \frac{\sqrt{x}^2-9}{|3-x|}$

(ג) $\displaystyle\lim_{x\to 1+} 3^{1/(x-1)}$

5. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

(ב) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$

(ג) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x}$

(ד) $\displaystyle\lim_{x\to 1} (1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$

(ה) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \cdot \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$

(ו) ★ $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \cdot \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$

(ז) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (3^x - 2^x)^{1/x}$

6. תהי f מוגדרת ע"י:

$$f(x)=\begin{cases} n, & x=\frac{m}{n},\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N},\ m,n \text{ זרים} \\ 0, & x=0 \text{ או } x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

(א) הראו כי לכל $x_0\in\mathbb{R}$ לא קיימת סביבה של x_0 שבה f חסומה.

(ב) הראו כי לכל $x_0\in\mathbb{R}$ הגבול $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ לא קיים, אפילו לא במובן הרחב.

7. תהי f מוגדרת ע"י:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sin(3x)}{x}, & x>0 \\ \frac{x+5}{2x+\alpha}, & x<0 \end{cases}$$

עבור אילו ערכי α קיים ל־f גבול בנקודה $x=0$?

8. הוכיחו כי אם f חסומה בסביבת נקודה x_0 ו־$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, אז $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=0$.

9. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$ ו־$\lim\limits_{x\to 1} g(x)=10$, אז $\lim\limits_{x\to 2} g(f(x))=10$.

(ב) אם $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, ו־$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=L$, אז $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=L$.

10. שאלה זו מתייחסת לתכונות של פונקציות רציפות.

(א) נתונה פונקציה $f\in C[a,b]$ (כלומר f רציפה בקטע $[a,b]$). הוכיחו כי גם $|f|\in C[a,b]$.

(ב) נתונות $f,g\in C[a,b]$. נגדיר פונקציות חדשות באופן הבא:

$$m(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$
$$M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$$

הוכיחו שגם $M(x),m(x)\in C[a,b]$.

(ג) נתונות שלוש פונקציות $f_1,f_2,f_3\in C[a,b]$. נגדיר את הפונקציה $f(x)$ להיות הערך האמצעי (חציון) מבין הערכים $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)$. הראו כי $f(x)$ רציפה ב־$[a,b]$.

11. מצאו את תחום הרציפות של הפונקציות הבאות:

(א) $f(x)=\lfloor x^2\rfloor\sin(\pi n x)$

(ב) $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2e^{nx}+x}{e^{nx}+1}$

(ג) $f(x)=\lim_{n\to\infty}\log(e^n+x^n)$

(ד) ★ $f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n+x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}}$

סמסטר א' תשע"א

תרגיל מס' 8 חדוו"א – 1

1. הוכיחו או הפריכו:

א) אם $g(x)$ ו $f(x)$ אינן רציפות בנק' x_0 אזי בהכרח:

(a $f(x)+g(x)$; (b $f(x)g(x)$ גם אינן רציפות בנק' x_0.

ב) אם $f(x)\in C(x_0)$ ו- $g(x)$ אינה רציפה בנק' x_0 אזי בהכרח:

(a $f(x)+g(x)$; (b $f(x)g(x)$ גם אינן רציפות בנק' x_0.

2. קבעו את תחומי הרציפות מיינו את נקודות אי-הרציפות של פונקציות הבאות:

א) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x+2}, & x\neq -2\\ A, & x=2\end{cases}$; ב) $f(x)=\begin{cases}\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$;

ג) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x)}{|x|}, & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$; ד) $f(x)=\begin{cases}\sin(x)\,sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$;

ה) $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$; ו) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$.

3. נתון שפונקציה $f(x)\in C[0;\infty)$. נתון גם ש- $\lim_{x\to\infty} f(x)=M<\infty$. הוכיחו ש- $f(x)$ חסומה ב- $[0,\infty)$.

4. נאמר שפונקציה $f(x)$ מקימת את תנאי ליפשיץ ($f(x)\in Lip(K)$) אם $\forall x_1,x_2$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|\leq K|x_1-x_2|$, עבור מספר קבוע $K\in R_+$.

א) אם $f(x)\in Lip(K)$. הוכיחו ש- $f(x)$ רציפה בתחום הגדרה שלה.

ב) אם $f(x)\in Lip(K)$ ו- $0<K<1$ אז לכל $x_0\in D_f$ הסדרה $f(x_n)=x_{n+1}$ ($n=0,1,2,\ldots,m\ldots,$) מתכנסת למספר $A=\lim_{n\to\infty} x_n$. הוכיחו גם שנקודה A היא נקודת שבת של $f(x)$ (כלומר $f(A)=A$).

5. נתונה $f(x)\in C[a,b]$. נתון גם שקיים מספר A: $f(x)>A$ לכל $a\leq x\leq b$.

הוכיחו שקיים $c>0$ שמתקיים אי-השוויון $f(x)>A+c$

6. נתון ש- $f(x)\in C(R)$. הוכיחו שלמשוואה $f\big(f(x)\big)=x$ קיים פתרון אם ורק אם יש פתרון למשוואה $f(x)=x$.

7.א) הוכיחו שלמשוואה: $x^7+3x^2-2=0$ יש שורש בקטע [0,1] .

ב) הוכיחו שלכל פולינום ממשי בעל דרגה אי-זוגית קיים שורש ממשי.

8. ידוע ש- $\forall x \in Q$: $f(x) = g(x)$ והפונקציות $f, g \in C(R)$. הוכיחו שלכל $x \in R$ מתקיים $f(x) = g(x)$.

9. נתון ש- $f(x) \in C(Q)$. האם בהכרח קיימת $g(x) \in C(R)$ כך ש- $\forall x \in Q$: $f(x) = g(x)$?

10. מצאו כל הפונקציות הרציפות בכל R המקיימות את המשוואה: $\forall x_1, x_2 \in R$

$f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$.

11. א) $f(x)$ רציפה ב- R ומחזורית בעלת מחזור T. הוכיחו שקיימות שתי נקודות x_1, x_2 כך ש-

$|x_1 - x_2| = \frac{T}{2}$ ו- $f(x_1) = f(x_2)$.

*ב) נתון ש- $f(x) \in C[0,1]$ ו- $f(0) = f(1)$. הוכיחו שלכל $n \in N$ קיימות שתי נקודות

x_1, x_2 כך ש- $|x_1 - x_2| = \frac{1}{n}$ ו- $f(x_1) = f(x_2)$.

12. האם פונקציות הבאות רציפות במידה שווה (במ"ש) בתחום נתון:

א) $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$, $x \in [-1,1]$; ב) $f(x) = \ln x$, $x \in (0,1)$;

ג) $f(x) = arctanx$, $x \in R$; ד) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$;

ה) $f(x) = x + \frac{x}{x+1}$, $x > 0$; ו) $f(x) = \sin(x^2)$, $x \in R$.

13. נתון שפונקציות $f(x) and\ g(x)$ הן רציפות במ"ש בתחום R. הוכיחו או הפריכו:

א) $f(x) + g(x)$ רציפה במ"ש.

ב) $f(x) * g(x)$ רציפה במ"ש.

14.א) $f(x) \in C(R)$ ונתון גם ש- $f(x)$ מחזורית. הוכיחו ש- $f(x)$ רציפה במ"ש.

ב) $f(x) \in C(R)$ ו- $\lim_{x\to\infty} f(x) = L < \infty$. הוכיחו ש- $f(x)$ רציפה במ"ש.

*15. (המשך של השאלה 9) אם $f(x) \in C(Q \cap [a,b])$. הוכיחו שקיימת $g(x) \in C[a,b]$ כך ש- $f(x) = g(x)$ לכל $x \in Q \cap [a,b]$ אם ורק אם $f(x)$ רציפה במ"ש.

ב ה צ ל ח ה !

חדו"א 1 - תרגיל בית מס' 9

1. עבור אילו ערכי α,β הפונקציה הבאה רציפה:

$$f(x)=\begin{cases}(1+\alpha x)^{\frac{\alpha}{x}} & ,\ x>0\\ \beta & ,\ x=0\\ e\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right) & ,\ x<0\end{cases}$$

2. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה כך ש $f(a)>0>f(b)$. נסמן

$$A=\{x\in[a,b]\ |\ f(x)\geq 0\}$$

(א) הוכיחו כי A חסומה ולא ריקה. הסיקו כי קיים $s=\sup A$.

(ב) הראו כי $f(s)=0$.

(ג) הסיקו את משפט ערך הביניים.

3. חיקרו רציפות במ"ש של הפונקציות הבאות בתחומים הנתונים:

(א) $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$ בתחום $(0,1)$

(ב) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ בתחום $(0,\infty)$

(ג) $f(x)=x\sin x$ בתחום $(0,\infty)$

4. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) נתון כי $f:[0,1]\to[0,1]$ פונקציה רציפה, אזי קיימת ל f נקודת שבת. כלומר קיימת נקודה $x_0\in[0,1]$ כך ש $f(x_0)=x_0$.

(ב) אם f פונקציה רציפה ב $\mathbb{R}$ כך ש $f(x)\in\mathbb{Q}$ לכל $x\in\mathbb{R}$ אזי f קבועה.

(ג) נתונה פונקציה רציפה $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, אזי לכל n נקודות $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(a,b)$ קיימת נקודה $x\in(a,b)$ כך ש

$$f(x)=\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}$$

5. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) נתון כי $f:A\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה במ"ש, אזי אם $\{x_m\}$ היא סדרת קושי כך ש $x_m\in A$ אזי הסדרה $\{f(x_m)\}$ היא גם סדרת קושי.

(ב) ★ נניח כי $A\subset\mathbb{R}$ תת־קבוצה חסומה. נתונה פונקציה $f:A\to\mathbb{R}$ המקיימת כי לכל סדרת קושי $\{x_m\}$ כך ש $x_m\in A$ מתקיים כי $\{f(x_m)\}$ היא גם סדרת קושי. הראו כי f רציפה במ"ש ב A. הראו כי התנאי ש A קבוצה חסומה הוא הכרחי.

6. הוכיחו כי אם f מחזורית ורציפה אזי היא מקבלת מינימום ומקסימום ב $\mathbb{R}$.

7. ★ יהיו a,b,c מספרים חיוביים. ו $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$ מספרים ממשיים. הוכיחו כי למשוואה:

$$\frac{a}{x-\lambda_1}+\frac{b}{x-\lambda_2}+\frac{c}{x-\lambda_3}=0$$

ישנם בדיוק שני פתרונות. אחד בקטע (λ_1,λ_2) והשני בקטע (λ_2,λ_3).

8. הוכיחו כי לכל סדרה חסומה $\{x_n\}$ ופונקציה רציפה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מתקיים:

(א) $\limsup\limits_{n\to\infty}f(x_n)\geq f\left(\limsup\limits_{n\to\infty}x_n\right)$

(ב) $\liminf\limits_{n\to\infty}f(x_n)\leq f\left(\liminf\limits_{n\to\infty}x_n\right)$

(ג) אם f מונוטונית עולה אזי יש שיוויון בסעיפים א' וב'.

9. הוכיחו כי למשוואות הבאות יש לפחות פתרון אחד בתחום הנתון:

(א) $(1-x)\cos x=\sin x$ כאשר $x\in(0,1)$

(ב) $|P(x)|=e^x$ כאשר $P(x)$ פולינום (שאינו 0) ו $x\in\mathbb{R}$.

10. הוכיחו כי יש שתי נקודות על קו המשווה בהן הטמפרטורה זהה.
<u>הערה:</u> ניתן להניח כי פונקציית הטמפרטורה רציפה.

11. הוכיחו את משפט ויירשטראס הכללי:
A קבוצה סגורה וחסומה. פונקציה f רציפה בקבוצה A הינה חסומה ומקבלת מקסימום ומינימום.
<u>הערה:</u> קבוצה A היא סגורה אם לכל סדרה $\{x_n\}$ עם ערכים ב A כך ש $x_n\to x$ מתקיים כי $x\in A$.

חדו"א 1 - תרגיל בית מס' 10

1. חשבו את הנגזרות של הפונקציות הבאות (ציינו תחום הגדרה של הנגזרת):

   (א) $\sin\left(e^x\right)$

   (ב) $\log\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)$

   (ג) $\left(\log x\right)^{\alpha}$

   (ד) x^{x^x}

   (ה) $\arctan\left(-\log^2 x\right)$

2. חשבו את הנגזרות של הפונקציות הבאות: (ציינו תחום הגדרה)

   (א) $\sqrt{|x|}$ כאשר $x\in\mathbb{R}$

   (ב) $\lfloor x^2\rfloor \sin^2\left(\pi x\right)$ כאשר $x\geq 0$

   (ג) $\left\{x^2\right\}\sin^2\left(\pi x\right)$ כאשר $x\geq 0$ ($\{x\}$ מסמן את החלק השברי של x - כלומר $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$)

   (ד) $\log|x|$ כאשר $x\neq 0$

   (ה) $\arccos|x|$ כאשר $|x|>1$

3. נגדיר את הפונקציה הבאה:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right| & ,\ x\neq 0\\ 0 & ,\ x=0\end{cases}$$

הראו כי $f\left(x\right)$ אינה גזירה בנקודות $x_n=\frac{2}{n+1}$ לכל $n\in\mathbb{Z}$ וכי $f\left(x\right)$ גזירה בנקודה 0 (שהיא נקודת גבול של $\{x_n\}$).

4. נגדיר את הפונקציה הבאה: ($\alpha,\beta>0$)

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x^{\beta}\sin\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right) & ,\ x\neq 0\\ 0 & ,\ x=0\end{cases}$$

מצאו עבור אילו ערכים של α,β הפונקציה $f\left(x\right)$ רציפה/גזירה/גזירה ברציפות/גזירה פעמיים בנקודה 0.

5. הוכיחו את הטענות בסעיפים א' וב':

(א) תהי f פונקציה גזירה בנק' x, אזי מתקיים:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=f'(x)$$

(ב) ★ תהי f פונקציה גזירה פעמיים בנק' x, אזי מתקיים:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=f''(x)$$

(ג) תנו דוגמא לפונקציה עבורה קיים הגבול בסעיף א' בנקודה מסוימת, אבל הפונקציה לא גזירה בנקודה.

6. תהי f פונקציה גזירה n פעמים בקטע (a,b). נתון כי קיימות נק' $x_0,x_1,\ldots,x_n\in(a,b)$ כך ש $f(x_0)=f(x_1)=\ldots=f(x_n)$. הוכיחו כי קיימת נק' $c\in(a,b)$ כך ש $f^{(n)}(c)=0$.

7. נתון כי $f''(x)=a\in\mathbb{R}$ לכל $x\in(y,z)$. הוכיחו כי קיימים מספרים $b,c\in\mathbb{R}$ כך ש $f(x)=\frac{a}{2}\cdot x^2+bx+c$ לכל $x\in(y,z)$. הראו שהטענה איננה נכונה בהכרח אם ידוע כי $f''(x)=a$ בקבוצה שאיננה קטע.

8. הוכיחו את אי־השיוויונות הבאים:

(א) $\frac{1}{\cos^2\alpha}<\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{\beta-\alpha}<\frac{1}{\cos^2\beta}$ לכל $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$.

(ב) $x^\alpha-\alpha x\le 1-\alpha$ לכל $x\ge 0$ ו $0<\alpha<1$.

9. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) $\left(e^x\sin x\right)^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}e^x\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{4}\right)$ לכל $x\in\mathbb{R}$ ו $n\ge 1$

(ב) $\left(x^n\log x\right)^{(n)}=n!\left(\log x+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$ לכל $x>0$ ו $n\ge 1$

10. הוכיחו כי הפונקציות הבאות רציפות במ"ש בתחומים הנתונים:

(א) $f(x)=\arctan x$ בכל $\mathbb{R}$

(ב) $f(x)=\log\left(1+x^2\right)$ בתחום $[0,\infty)$

11. נתון כי $a_1,\ldots,a_n$ הם מספרים ממשיים שונים מ 0 וכי $b_1,\ldots,b_n$ הם מספרים ממשיים כך ש $b_j\ne b_k$ לכל $j\ne k$. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) למשוואה הבאה יש לכל היותר $n-1$ שורשים ב $(0,\infty)$:

$$a_1x^{b_1}+a_2x^{b_2}+\ldots+a_nx^{b_n}=0$$

(ב) למשוואה הבאה יש לכל היותר $n-1$ שורשים ב $\mathbb{R}$:

$$a_1e^{b_1x}+a_2e^{b_2x}+\ldots+a_ne^{b_nx}=0$$

חדו"א 1 ־ תרגיל בית מס' 11

1. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציות הבאות:

(א) $f(x) = x + |\sin(2x)|$

(ב) $f(x) = e^{-x}(x-2)^2$

(ג) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$

2. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות (ציינו את תחום ההגדרה של הפונק' ואת סוג נק' הקיצון):

(א) $f(x) = x^3\sqrt{x-1}$

(ב) $f(x) = \sin x + \cos x$

(ג) $f(x) = \left|x^2 - 4x + 3\right|$

3. מצאו נק' מינימום/מקסימום גלובליים עבור הפונקציות הבאות בתחומים הנתונים:

(א) $f(x) = 2^x - 3^x$ כאשר $x \in [-2,5]$

(ב) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ כאשר $x \in \left[\alpha, \frac{1}{\alpha}\right]$ עבור $\alpha \in (0,1)$.

(ג) $f(x) = \sin^2 x + \cos^3 x$ כאשר $x \in [0,2]$.

4. היעזרו במשפט קושי כדי להוכיח את אי־השיוויונות הבאים: (אפשר להיעזר באי־שיוויונות מהתרגול)

(א) $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ כאשר $x \neq 0$

(ב) $\sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ כאשר $x > 0$

5. הוכיחו את אי־השיוויונות הבאים:

(א) $\left(x + \frac{1}{x}\right)\arctan x > 1$ כאשר $x > 0$

(ב) $2x\arctan x \geq \log\left(1 + x^2\right)$ לכל $x \in \mathbb{R}$

(ג) $x^m(1-x)^n \leq \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$ כאשר $x \in [0,1]$ ו $m,n \in \mathbb{N}$

(ד) $(e+x)^{e-x}(e-x)^{e+x}$ כאשר $x \in (0,e)$

(ה) ★ $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{8} \cdot x^2$ כאשר $\alpha \in (0,1)$ ו $x \in [-1,1]$

6. נתון כי $f \in C^{(2k)}\left((a,b)\right)$. כמו כן ידוע כי בנקודה $c \in (a,b)$ מתקיים $f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(2k-1)}(c) = 0$ הוכיחו כי אם $f^{(2k)}(c) > 0$ אזי c היא נק' מינימום מקומי מוחלט ואם $f^{(2k)}(c) < 0$ אזי c היא נק' מקסימום מקומי מוחלט.

7. הוכיחו את כלל לייבניץ לנגזרות. אם f, g פונקציות גזירות n פעמים בנקודה x_0 אזי:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) f^{(k)}(x_0) \cdot g^{(n-k)}(x_0)$$

8. נתונה הסדרה $a_1 = \frac{\pi}{4}$, $a_n = \cos(a_{n-1})$. הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ כאשר α הוא הפתרון של המשוואה $\cos x = x$.
<u>רמז:</u> היעזרו במשפט לגרנז'.

9. הוכיחו כי למשוואות $\sin(\cos x) = x$ ו $\cos(\sin x) = x$ יש פתרון יחיד ב $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ נסמן ב x_1, x_2 את הפתרונות למשוואות בהתאמה. הראו כי $x_1 < x_2$.

10. תהי $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f'(0) = 1$, $f(0) = 0$ ו $f'' + f \equiv 0$.

    (א) הכפילו את המשוואה ב $2f'$ והסיקו ש $(f')^2 + f^2$ היא פונקציה קבועה בקטע $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. למה שווה הקבוע ?

    (ב) הסיקו כי ערכי f שייכים לקטע $[-1,1]$. נסמן $g(x) = \arcsin f(x)$, הראו כי $g'(x) = 1$ לכל $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ כך שמתקיים עבורו $|f(x)| \neq 1$.

    (ג) הוכיחו כי $g(x) = x$ ו $f(x) = \sin x$ בסביבה של 0.

    (ד) הראו כי $f(x) = \sin x$ לכל $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

11. נתונה הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^a & , \quad x > 0 \\ \frac{e^{bx}-1}{cx} & , \quad x < 0 \end{cases}$$

בידקו עבור אילו ערכים של הפרמטרים a, b, c ניתן להגדיר את $f(0)$ כך ש $f(x)$ היא ב $C(\mathbb{R}), C^1(\mathbb{R}), C^2(\mathbb{R})$.

12. נתונה הפונקציה: $f(x) = x + (1-x)\sin^2 x$.

    (א) הוכיחו כי לכל $x \in (0,1)$ מתקיים: $x \leq f(x) \leq 1$.

    (ב) יהי $a_0 \in (0,1)$. נגדיר סדרה רקורסיבית באופן הבא: $a_n = f(a_{n-1})$ לכל $n \in \mathbb{N}$. הראו כי a_n סדרה מתכנסת.

    (ג) חשבו את הגבול של הסדרה a_n.

13. ★ נתון כי הפונקציה f גזירה בקטע $[a,b]$ ומתקיים $f(a) = 0$, $|f'(x)| \leq M\,|f(x)|$ לכל $x \in [a,b]$ ($M \in \mathbb{R}_+$). הוכיחו כי $f(x) = 0$ לכל $x \in [a,b]$.

14. ★ היעזרו במשפט לגרנז' כדי להוכיח את אי־השיוויון:

$$\left(1 + \frac{x}{p}\right)^p < \left(1 + \frac{x}{q}\right)^q$$

כאשר $x > 0$ ו $0 < p < q$.

חדו"א 1 - תרגיל בית מס' 12

1. חשבו את הגבולות הבאים:

   (א) $\lim\limits_{x\to0}\frac{xa^x}{a^x-1}$ כאשר $a>0$ ו $a\neq1$

   (ב) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2(5x)}{e^{3x}-3x-1}$

   (ג) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{\log x}$

   (ד) $\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x)^x$

   (ה) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-\cos x}{4x+\sin x}$

   (ו) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\cos x-(x+1)}{\tan x-\sin x}$

   (ז) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{x-1}$

   (ח) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right)$

   (ט) $\lim\limits_{x\to5}(6-x)^{\frac{1}{x-5}}$

   (י) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

   (יא) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

2. האם ניתן להיעזר במשפט לופיטל לצורך חישוב הגבולות הבאים ?

   (א) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+\sin 2x+1}{(2x+\sin 2x)(\sin x+3)^2}$

   (ב) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right)^x$

3. הוכיחו את הטענה הבאה בעזרת משפט לופיטל: הפונקציה f גזירה ב $(0,\infty)$ ו $a>0$. אם $\lim\limits_{x\to\infty}\left(af(x)+2\sqrt{x}f'(x)\right)=L$ אזי $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\frac{L}{a}$. האם הטענה נכונה גם במקרה ש $a<0$?

4. חשבו את פיתוח טיילור מסדר n של הפונקציות הבאות סביב הנק' x_0:

   (א) $f(x)=2^x$, $x_0=0$, $n=3$

   (ב) $f(x)=\log(\cos x)$, $x_0=0$, $n=4$

(ג) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=1$, $n=4$

(ד) $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $x_0=0$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ($\alpha\neq 0$). חשבו מהי השארית בצורת לגרנז'.

5. הוכיחו את אי־השיוויונות הבאים (עבור $x>0$):

(א) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}<\log(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

(ב) $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}<\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}$

6. נתון כי f פונקציה גזירה ב $[0,1]$ ומתקיים $f(0)=f(1)=0$. בנוסף נתון כי $|f''(x)|\leq A$ ב $(0,1)$. הוכיחו כי

$$|f'(x)|\leq\frac{A}{2},\quad\forall x\in[0,1]$$

7. נתון כי f גזירה פעמיים ב $[a,b]$ ומתקיים $f'(a)=f'(b)=0$. הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש

$$|f''(c)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

8. תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב $\mathbb{R}$, כך ש $M_k=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f^{(k)}(x)\right|<\infty$ עבור $k=0,1,2$ (כלומר הפונקציה ושתי הנגזרות הראשונות שלה חסומות ב $\mathbb{R}$). הוכיחו כי $M_1^2\leq 2M_0M_2$.
<u>רמז:</u> לכל $a\in\mathbb{R}$ פתחו את $f(a\pm t)$ פיתוח טיילור מסדר ראשון סביב a והוכיחו כי $2M_1t\leq 2M_0+M_2t^2$ לכל t.

9. נתון כי f גזירה שלוש פעמים ב $[-1,1]$ ומקיימת $f(0)=f(-1)=f'(0)=0$, $f(1)=1$. הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in(-1,1)$ כך ש $f^{(3)}(c)\geq 3$.

10. נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה המקיימת את המשוואה:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

לכל $x\in\mathbb{R}$ ו $h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(א) נתון כי f גזירה פעמיים ב $\mathbb{R}$, הוכיחו כי f פולינום מדרגה 2.

(ב) ★★ הוכיחו כי f היא פולינום מדרגה 2 בעזרת הנתון בלבד (בלי להניח כי f גזירה פעמיים).

חדו"א 1 - תרגיל בית מס' 13

1. מצאו טור טיילור לפונקציות הבאות, סביב הנקודה $x=0$:
   (א) $f(x)=\sin\left(x^3\right)$, עבור $x\in\mathbb{R}$
   (ב) $f(x)=\log\left(1+x+x^2\right)$, עבור $x\in(-1,1)$
   (ג) $f(x)=\frac{1}{1-5x+6x^2}$, עבור $x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$
   (ד) $f(x)=\sin x\cdot\cos 3x$, עבור $x\in\mathbb{R}$
   (ה) ★ $f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x$, עבור $x\in\mathbb{R}$

2. בעזרת פיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ הוכיחו את אי־השיוויון:

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}\le e^{x^2/2},\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

3. יהיו $f,g:I\to\mathbb{R}$ פונקציות קמורות על קטע $I\subset\mathbb{R}$.
   (א) הוכיחו כי $f+g$ פונקציה קמורה.
   (ב) הוכיחו כי cf קמורה, לכל קבוע $c>0$.
   (ג) הוכיחו כי $\max\{f,g\}$ קמורה.
   (ד) האם $\min\{f,g\}$ בהכרח פונקציה קמורה ?

4. תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה הפיכה וקמורה. האם f^{-1} קמורה ? מה אם נתון כי f פונקציה יורדת ?

5. הוכיחו את אי־השיוויונות הבאים:
   (א) לכל $x,y>0$:

$$x\log x+y\log y\ge(x+y)\log\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

   (ב) לכל $\alpha>1$ ולכל $x_1,x_2,\ldots,x_n>0$:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^{\alpha}\le\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k^{\alpha}$$

6. ★ נסמן $x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$, כאשר $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0,\pi)$. הוכיחו כי מתקיים אי־השיוויון הבא:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{\sin(x_k)}{x_k} \le \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$$

7. הוכיחו את אי־השיוויונות הבאים:

(א) עבור $\alpha_k, x_k > 0$ לכל $k \in \{1,\ldots,n\}$ כך שמתקיים $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$:

$$\frac{1}{\frac{\alpha_1}{x_1} + \ldots + \frac{\alpha_n}{x_n}} \le x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \le \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$$

(ב) עבור $\alpha_k > 0, x_k, y_k \ge 0$ לכל $k \in \{1,\ldots,n\}$ כך שמתקיים $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$:

$$x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} + y_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot y_n^{\alpha_n} \le (x_1 + y_1)^{\alpha_1} + \ldots + (x_n + y_n)^{\alpha_n}$$

(ג) עבור $\alpha_i > 0, x_{i,j} \ge 0$ לכל $j \in \{1,\ldots,m\}$, ולכל $i \in \{1,\ldots,n\}$ כך שמתקיים $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$:

$$\sum_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} x_{i,j}^{\alpha_i} \le \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} x_{i,j}\right)^{\alpha_i}$$

רמז: הוכיחו באינדוקציה על m והיעזרו בסעיף ב'.

8. נתון כי $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ פונקציה קמורה ובנוסף:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.$$

הוכיחו כי הפונקציה $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ היא מונוטונית עולה ב $(0,\infty)$.