

## מועד ב' – מד"ר – 88-240 – 19/03/23

זמן המבחן: שלוש שעות. חומר עזר: נוסחאון מצורף, מחשבון מותר משקל כל שאלה 22 נק', ענו על כל השאלות.  
מרצה: דר' ארז שיינר. מתרגל: מר עומר רוסלר.

1. מצאו פתרון למד"ר  $x^2y' + xy + 1 = 0$  המקיים  $y(1) = 0$ .

2. מצאו פתרון למד"ר  $2xyy' = x^2 + 3y^2$  המקיים  $y(1) = -2$ .

3. מצאו פתרון למד"ר  $y'' - 2y' + y = x \cdot e^x$  המקיים  $y(0) = 0, y'(0) = 1$ .

4. כדור בעל מסה של  $m = 2kg$  נזרק כלפי מעלה מגובה של  $y_0 = 10m$  ומגיע לקרקע לאחר 2 שניות.

כמו כן נתון כוח התנגדות האוויר שווה בגודלו לחצי מגודל מהירות הכדור.

לצורך הפשטות הניחו כי קבוע תאוצת הכובד של כדור הארץ הוא  $g = 10$ .

א. מצאו את המהירות בה נזרק הכדור.

ב. מצאו את תאוצת הכדור ברגע הפגיעה בקרקע.

5. נסמן ב- $D$  את אופרטור הגזירה, וב- $I$  את אופרטור הזהות.

א. עבור  $S = D + I$  מצאו פתרון למד"ר  $Sy = x$ .

ב. מצאו פתרון למד"ר  $xy'' + (x - 1)y' - y = 0$  המקיים  $y(1) = 0, y'(1) = 1$ .

רמז:  $T = (xD - I)(D + I)$ .

## נוסחאון מד"ר

### חלק א' – מד"ר מסדר ראשון:

כתיב דיפרנציאלי – את המד"ר  $y' = f(x, y)$  נוכל לכתוב באופן שקול  $dy = f(x, y)dx$

מד"ר פרידה – פתרון למד"ר מהצורה  $f(x)dx = g(y)dy$  מקיים את המשוואה הסתומה  $F(x) = G(y) + C$   
כאשר  $F(x) = \int f(x)dx$  וכן  $G(y) = \int g(y)dy$ .

מד"ר הומוגנית – מד"ר מהצורה  $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ . נציב  $z = \frac{y}{x}$  ונקבל  $\int \frac{1}{g(z)-z} dz = \ln|x| + C$ . נמצא את  $z$  ונציב לקבל  $y = xz$ .

ניתן להציג את  $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$  אם ורק אם לכל  $\lambda \neq 0$  מתקיים כי  $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ .  
במקרה זה  $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$

מד"ר לינארית מסדר ראשון – פתרון למד"ר  $y' + a(x)y = b(x)$  נתון ע"י הנוסחא

$$y = e^{-A(x)} \left( C + \int b(x)e^{A(x)} dx \right)$$

כאשר  $A(x) = \int a(x)dx$ .

משוואת ברנולי – יהי  $n \neq 0, 1$ , מד"ר מהצורה  $y' + a(x)y = b(x)y^n$ .

נציב  $z = y^{1-n}$  ונקבל את המד"ר  $z' + (1-n)a(x)z = (1-n)b(x)$ .

נמצא את  $z$  ונחליף  $y = z^{\frac{1}{1-n}}$ .

מד"ר מדוייקת – מד"ר מהצורה  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ .

הפתרון של מד"ר מדוייקת מקיים את המשוואה הסתומה  $F(x, y) = C$  כאשר  $F_x = P, F_y = Q$ .

שלבי הפתרון:

1. נבדוק אם היא מדוייקת – המד"ר מדוייקת אם ורק אם  $P_y = Q_x$ .
2. נמצא את  $F$  ע"י חישוב אינטגרל  $F = \int Pdx + c(y)$ .
3. נגזור ונשווה למקדם השני  $Q = \frac{\partial}{\partial y}(\int Pdx + c(y))$ , וכך נמצא את  $c(y)$ .
4. הפתרון נתון באופן סתום ע"י  $F(x, y) = C$ .

גורם אינטגרציה – מד"ר מהצורה  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ , נחפש גורם אינטגרציה  $\mu(x)$  שכפל בו יהפוך את המד"ר למדוייקת.

שלבי התהליך:

1. יש גורם אינטגרציה  $\mu(x)$  אם הביטוי  $\frac{P_y - Q_x}{Q}$  אינו תלוי ב- $y$ .
2. במקרה זה, גורם האינטגרציה הוא  $\mu(x) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx}$ .
3. נכפול בגורם האינטגרציה, ונוודא שקיבלנו מד"ר מדוייקת (לא חובה מתמטית, אבל מומלץ מאד).
4. נפתור את המד"ר המדוייקת שקיבלנו.

בעיית קושי למד"ר מסדר ראשון – מציאת פונקציה  $y$  המקיימת את המד"ר  $y' = f(x, y)$  וכן את תנאי ההתחלה  $y(x_0) = y_0$ .

המשוואה האינטגרלית – בעיית הקושי שקולה למשוואה האינטגרלית  $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$ .

משפט הקיום והיחידות – תהי  $f(x, y)$  רציפה ובעלת נגזרת חלקית  $f_y$  רציפה בתחום  $|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$ . נסמן ב- $M$  את החסם של  $|f(x, y)|$  בתחום, ונסמן  $a' = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ .

אזי קיים פתרון יחיד  $y$  לבעיית הקושי  $y' = f(x, y)$  עם תנאי ההתחלה  $y(x_0) = y_0$  בתחום  $|x - x_0| \leq a'$ .

### חלק ב' – נוסחאות פיזיקליות בסיסיות:

משמעות הנגזרות –

1.  $y(t)$  מיקום
2.  $v(t) = y'(t)$  מהירות
3.  $a(t) = y''(t)$  תאוצה

החוק השני של ניוטון -  $F = ma$  כאשר  $F$  הוא סכום הכוחות,  $m$  היא המסה של הגוף, וכן  $a$  הוא התאוצה של הגוף

כוח המשיכה של כדור הארץ – עבור גוף "קרוב" לפני כדור הארץ נניח כי כוח המשיכה הוא  $mg$  כאשר  $m$  היא המסה של הגוף וכן  $g$  הוא קבוע תאוצת הכובד של כדור הארץ ( $g \approx 9.82 \text{ m/sec}^2$ ).

כוח קפיץ – קפיץ בעל קבוע קפיץ  $k$  מפעיל כוח פרופורציונלי למרחק מנקודת הרפיון בכיוון ההפוך.

אם  $y$  הוא המיקום ביחס לנקודת הרפיון, אז הקפיץ יפעיל כוח של  $-ky$ .

הורדת סדר למד"ר מסדר שני ללא המשתנה – עבור מד"ר מהצורה  $y'' = f(y, y')$

1. נחפש פונקציה  $p(y)$  עבורה  $p'p = f(p, y)$

2. נחפש פונקציה  $y$  המקיימת  $y' = p(y)$ .

מד"ר לינארית – מד"ר מהצורה  $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$  נקראת מד"ר לינארית מסדר  $n$ . אם  $b(x) = 0$  המד"ר נקראת הומוגנית.

בעיית קושי למד"ר לינארית – מציאת פונקציה המקיימת את המד"ר הלינארית מסדר  $n$  ואת תנאי ההתחלה

$$y(x_0) = b_0, y'(x_0) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1}$$

משפט קיום ויחידות – אם המקדמים  $a_i(x), b(x)$  רציפים בקטע  $I$  אזי קיים פתרון יחיד בקטע  $I$  המקיים את בעיית הקושי.

מרחב הפתרונות – מרחב הפתרונות למד"ר הלינארית ההומוגנית מסדר  $n$  עם מקדמים רציפים הוא ממימד  $n$ .

פתרון כללי למד"ר לינארית – תהי מד"ר לינארית מסדר  $n$  עם מקדמים רציפים, יהיו  $y_1, \dots, y_n$  בסיס למרחב הפתרונות של המד"ר ההומוגנית ויהי  $y_p$  פתרון פרטי למד"ר האי הומוגנית. אזי הפתרון הכללי למד"ר הוא

$$y = y_p + c_1y_1 + \dots + c_ny_n$$

הורונסקיאן – עבור הפונקציות  $y_1, \dots, y_n$  נגדיר את הורונסקיאן

$$W = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

תלות לינארית של פתרונות – תהי מד"ר לינארית מסדר  $n$  עם מקדמים רציפים בקטע  $I$ , ויהיו  $y_1, \dots, y_n$  פתרונות למד"ר.

אזי הפתרונות ת"ל אם ורק אם הורונסקיאן מתאפס בכל הקטע  $I$ .

מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים – הפולינום האופייני של המד"ר  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0 = b(x)$  הוא

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

אם  $\lambda \in \mathbb{R}$  שורש ממשי של הפולינום האופייני מריבוי  $k$ , אזי הוא תורם את הפתרונות

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}$$

למד"ר ההומוגנית.

אם  $\lambda = a \pm bi \in \mathbb{C}$  זוג שורשים מרוכבים של הפולינום האופייני מריבוי  $k$  כל אחד, אזי הם תורמים את הפתרונות

$$e^{ax} \cos(bx), e^{ax} \sin(bx), xe^{ax} \cos(bx), xe^{ax} \sin(bx), \dots, x^{k-1}e^{ax} \cos(bx), x^{k-1}e^{ax} \sin(bx)$$

למד"ר ההומוגנית.

שיטת הניחוש עבור מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים – עבור המד"ר

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0 = (c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m)e^{ax}$$

כאשר  $a$  שורש של הפולינום האופייני מריבוי  $k$  ננחש פתרון פרטי

$$y_p = x^k(d_0 + d_1x + \dots + d_mx^m)e^{ax}$$

עבור המד"ר

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0 = (c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m)e^{ax} \cos(bx)$$

או המד"ר

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0 = (c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m)e^{ax} \sin(bx)$$

כאשר  $a \pm bi$  שורשים של הפולינום האופייני מריבוי  $k$  כל אחד ננחש פתרון פרטי:

$$y_p = x^k(d_0 + d_1x + \dots + d_mx^m)e^{ax} \cos(bx) + x^k(t_0 + t_1x + \dots + t_mx^m)e^{ax} \sin(bx)$$

שיטת וריאצית המקדמים בעזרת כלל קרמר למציאת פתרון פרטי – תהי מד"ר לינארית מסדר  $n$  עם מקדמים רציפים בקטע  $I$ :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0 = b(x)$$

ויהיו  $y_1, \dots, y_n$  פתרונות המהווים בסיס למרחב הפתרונות של המד"ר ההומוגנית. אזי הפונקציה

$$y_p = c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$$

מהווה פתרון פרטי למד"ר אם לכל  $i$  מתקיים כי

$$c_i'(x) = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

כאשר

$$A = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

וכן  $A_i$  היא המטריצה המתקבלת מ  $A$  ע"י החלפת העמודה  $i$  בעמודה

טורי טיילור –

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

מערכת מד"ר – עבור מערכת מד"ר מהצורה  $\vec{y}^{(n)} = A\vec{y}$ , כאשר  $v_1$  ו"ע עם ע"ע מתאים  $\lambda_1$  של המטריצה  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

ננחש פתרון  $\vec{y} = f \cdot v_1$ , ונקבל כי הוא אכן פתרון אם  $f^{(n)} = \lambda_1 f$ .

משוואת אוילר – משוואת אוילר הומוגנית היא משוואה לינארית מהצורה

$$a_n x^n y^{(n)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

על מנת למצוא את הפתרונות של משוואת אוילר הומוגנית נבצע את השלבים הבאים:

1. נציב  $y = x^r$  במשוואה, נצמצם את  $x^r$  ונקבל את המשוואה האינדנציאלית.
2. אם  $r \in \mathbb{R}$  שורש מריבוי  $k$  של המשוואה האינדנציאלית, נקבל את הפתרונות  $x^r, \ln(x) x^r, \dots, (\ln(x))^{k-1} x^r$
3. אם  $a \pm bi \in \mathbb{C}$  שורשים מריבוי  $k$  כל אחד של המשוואה האינדנציאלית נקבל את הפתרונות  $x^a \cos(b \ln(x)), x^a \sin(b \ln(x)), \ln(x) x^a \cos(b \ln(x)), \ln(x) x^a \sin(b \ln(x)), \dots, (\ln(x))^{k-1} x^a \cos(b \ln(x)), (\ln(x))^{k-1} x^a \sin(b \ln(x))$

### חלק ד' – התמרת לפלס והדלתא של דירק:

$$\mathcal{L}(y) = \int_0^\infty e^{-st} y(t) dt - \text{התמרת לפלס}$$

התמרות לפלס ידועות –

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(\sin(at)) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}(\cos(at)) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s - a}$$

$$\mathcal{L}(\delta(t - a)) = e^{-sa}$$

תכונות התמרת לפלס –

יחידות –

אם  $y_1, y_2$  רציפות וכן  $\mathcal{L}(y_1) = \mathcal{L}(y_2)$  אזי  $y_1 = y_2$ .

לינאריות –

$$\mathcal{L}(y_1 + ay_2) = \mathcal{L}(y_1) + a\mathcal{L}(y_2)$$

התמרת הנגזרת הראשונה –

$$\mathcal{L}(y') = s\mathcal{L}(y) - y(0)$$

התמרת הנגזרת –

$$\mathcal{L}(y^{(n)}) = s^n\mathcal{L}(y) - s^{n-1}y(0) - \dots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$$

נגזרת ההתמרה –

$$\mathcal{L}(ty) = -F'(s)$$

הזזה של המשתנה  $s$  – אם  $F(s) = \mathcal{L}(y)$  אזי

$$F(s - a) = \mathcal{L}(e^{at}y(t))$$

הזזה של המשתנה  $t$  – אם  $F(s) = \mathcal{L}(y)$  אזי

$$e^{-as}F(s) = \mathcal{L}(u(t - a)y(t - a))$$

כאשר  $u(t)$  היא פונקציית המדרגה:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$