מתמטיקה בדידה 88-195 תשע"ד

שיעורי בית מספר 5

מתרגלים: רועי בן-ארי ולידור אלדבח

הסבר

בתרגיל זה ננסח מספר טענות חשובות לגבי הסגור הטרנזיטיבי ונוכיח אותן. לאחר מכן נשתמש בכלי החדש שפיתחנו. לאורך התרגיל מופיעות שאלות שיעורי הבית באדום עם מספור בסוגריים. דוגמה:

(0) הוכיחו או הפריכו: לכל סיר יש מכסה.

את השאלות הממוספרות עליכם לפתור ולהגיש במועד הגשת תרגיל בית זה.

תרגיל מודרך- הסגור הטרנזיטיבי

הגדרה- יהי R יחס על קבוצה A. הסגור הטרנזיטיבי של R, מסומן $tc(R)$, מוגדר להיות היחס הטרנזיטיבי הקטן ביותר על A המכיל את R. ז"א: $tc(R)$ טרנזיטיבי ומכיל את R, וכל יחס טרנזיטיבי על A המכיל את R מכיל גם את $tc(R)$.

לא ברור מההגדרה כי בכלל קיים סגור טרנזיטיבי לכל יחס, אם כי ברור שאם הוא קיים אז הוא יחיד. בנוסף, ההגדרה אינה מראה דרך מפורשת לבנות אותו. במהלך התרגיל אנו נוכיח הן את קיומו של הסגור הטרנזיטיבי והן בנייה קונסטרוקטיבית שלו.

למה 1

תהי $\{R_i\}_{i\in I}$ קבוצה לא ריקה של יחסים טרנזיטיביים על קבוצה A. הוכיחו כי $\bigcap_{i\in I} R_i$ הוא יחס טרנזיטיבי על הקבוצה A.

(1) הוכיחו את למה 1.

הוכחה: נוכיח כי $\bigcap_{i\in I} R_i$ יחס טרנזיטיבי על A. יהיו $(a,b),(b,c)\in\bigcap_{i\in I} R_i$, אזי $\forall i\in I:(a,b),(b,c)\in R_i$, ומטרנזיטיביות של R_i נקבל $\forall i\in I:(a,c)\in R_i$, כלומר $(a,c)\in\bigcap_{i\in I} R_i$.

מ.ש.ל.

תזכורת: תהי F קבוצה לא ריקה של קבוצות (כל איברי F הם קבוצות). נגדיר:

$$\bigcap F := \{a \mid \forall A\in F : a\in A\}$$
$$\bigcup F := \{a \mid \exists A\in F : a\in A\}$$

טענה 1

יהי R יחס על קבוצה A. נגדיר:

$$B := \{T \subseteq A\times A \mid T \text{ is transitive}, T \supseteq R\}$$

אזי $\bigcap B$ הוא הסגור הטרנזיטיבי של R, כלומר $tc(R) = \bigcap B$.

הוכחה: קודם כל נוודא כי אכן מוגדר $\bigcap B$, כלומר ש B היא אכן קבוצה לא ריקה של קבוצות. נשים לב כי $R \subseteq A\times A$ (לפי הגדרת היחס), וכי $A\times A$ הוא יחס טרנזיטיבי על A. לכן $A\times A \in B$ ובפרט B אינה ריקה.

עכשיו עלינו להראות כי $\bigcap B$ הוא היחס הטרנזיטיבי המינימלי המכיל את R. ברור ש $\bigcap B$ הוא יחס טרנזיטיבי כמסקנה מלמה 1. לכן נותר להראות מינימליות.

(2) הוכיחו: $\bigcap B$ הוא היחס הטרנזיטיבי הקטן ביותר המכיל את R. כלומר, לכל יחס טרנזיטיבי T על A שמקיים $T \subseteq R$, מתקיים $\bigcap B \subseteq T$.

הוכחה: יהי יחס טרנזיטיבי T על A שמקיים $R \subseteq T$, אזי מההגדרה של B מתקיים $T \in B$, ולכן מהגדרת החיתוך $\bigcap B \subseteq T$.

מ.ש.ל

עתה $\bigcap B$ הוא היחס הטרנזיטיבי הקטן ביותר המכיל את R ולכן מההגדרה הוא הסגור הטרנזיטיבי של R.

מ.ש.ל.

מסקנה: לכל יחס R קיים סגור טרנזיטיבי.

עתה משאנו יודעים כי הסגור הטרנזיטיבי קיים, נמצא בנייה מפורשת שלו אשר תעזור לנו בהוכחות לגביו. הבנייה תהייה אינדוקטיבית כאשר הרעיון מאחורי הבנייה הוא שבכל שלב אנו מוסיפים את הזוגות ההכרחיים על פי טרנזיטיביות.

הגדרה- יהי יחס R על קבוצה A. נגדיר באינדוקציה:

$$R^1 := R$$

$$R^{n+1} := R^n \cup \{(a,b)\in A\times A \mid \exists c\in A : (a,c),(c,b)\in R^n\}$$

טענה 2

יהי יחס R על קבוצה A. אזי מתקיים $tc(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$.

הוכחה: בעצם עלינו להוכיח כי $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ מקיים את הגדרת הסגור הטרנזיטיבי, כלומר שהוא היחס הטרנזיטיבי הקטן ביותר שמכיל את R.

(3) הוכיחו כי $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ הוא יחס טרנזיטיבי על A.

הוכחה: נשים לב כי לכל $n_1 \le n_2$ טבעיים מתקיים $R^{n_1} \subseteq R^{n_2}$. עתה נניח $(a,b),(b,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, אזי קיימים n,m טבעיים כך ש $(a,b) \in R^n ,(b,c) \in R^m$. בה"כ $n \le m$, לכן $R^n \subseteq R^m$, ולכן $(a,b),(b,c) \in R^m$, לכן מהגדרת R^{m+1} מתקיים $(a,c) \in R^{m+1}$, ולכן $(a,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$.

מ.ש.ל

עתה נותר להוכיח מינימליות. כלומר, שכל יחס טרנזיטיבי המכיל את R מכיל גם את $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$. לשם כך נניח כי T הוא יחס טרנזיטיבי המקיים $R \subseteq T$. נוכיח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים $R^n \subseteq T$:

מקרה $n=1$: במקרה זה הטענה ברורה, כיוון ש $R^1 = R$ מההגדרה, ולכן כיוון ש $R \subseteq T$ מהנתון מתקיים $R^1 \subseteq T$.

עתה נניח כי $R^n \subseteq T$, ונוכיח כי $R^{n+1} \subseteq T$.

(4) הוכיחו את שלב המעבר, כלומר שאם נתון $R^n \subseteq T$ אז מתקיים $R^{n+1} \subseteq T$.

הוכחה: נניח $R^n \subseteq T$ ונוכיח $R^{n+1} \subseteq T$, מהגדרת R^{n+1} לשם כך צריך להראות כי $R^n \cup \{(a,b) \in A \times A \mid \exists c \in A : (a,c),(c,b) \in R^n\} \subseteq T$. אך $R^n \subseteq T$ ידוע ולכן נותר להראות $\{(a,b) \in A \times A \mid \exists c \in A : (a,c),(c,b) \in R^n\} \subseteq T$. לשם כך ניקח $(a_1,b_1) \in \{(a,b) \in A \times A \mid \exists c \in A : (a,c),(c,b) \in R^n\}$, מההגדרה קיים $c \in A$ כך ש $(a_1,c),(c,b_1) \in R^n$, אבל $R^n \subseteq T$ לכן $(a_1,c),(c,b_1) \in T$. ועתה, כיוון ש T טרנזיטיבי, מתקבל $(a_1,b_1) \in T$. לכן $\{(a,b) \in A \times A \mid \exists c \in A : (a,c),(c,b) \in R^n\} \subseteq T$ ובסה"כ $R^{n+1} \subseteq T$.

מ.ש.ל

בכך הוכחנו שלכל n טבעי, $R^n \subseteq T$. לכן מהגדרת האיחוד נובע $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq T$, כנדרש.

מ.ש.ל.

עתה, משמצאנו בנייה מפורשת לסגור הטרנזיטיבי, נוכל להשתמש בבנייה זו להוכחת טענות שונות לגביו, כמו הטענה הבאה:

טענה 3

יהי R יחס רפלקסיבי וסימטרי על קבוצה A. אזי $tc(R)$ הוא יחס שקילות על הקבוצה A.

הוכחה: החלקים הפשוטים בהוכחה הם ההוכחות ש $tc(R)$ הוא יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי.

(5) הוכיחו כי במקרה זה $tc(R)$ הוא יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי.

הוכחה:

רפלקסיביות: יהי $a \in A$, כיוון ש R רפלקסיבי $(a,a) \in R$ ועתה כיוון ש $R \subseteq tc(R)$, $(a,a) \in tc(R)$.

טרנזיטיביות: $tc(R)$ טרנזיטיבי על פי ההגדרה.

מ.ש.ל

עתה נעבור להוכחה כי $tc(R)$ הוא יחס סימטרי. נוכיח את הטענה הזו באינדוקציה על הבנייה המפורשת של $tc(R)$.

טענת עזר: לכל n טבעי, R^n הוא יחס סימטרי על A.

(6) הוכיחו את טענת העזר.

הוכחה: נוכיח את הטענה באינדוקציה:

$n=1$: $R^1 = R$ ולכן סימטרי.

נניח כי R^n סימטרי ונוכיח ש R^{n+1} סימטרי. יהי $(a,b) \in R^{n+1}$. ישנם שני מקרים:

- אם $(a,b) \in R^n$ אז מסימטריות $(b,a) \in R^n$ ולכן $(b,a) \in R^{n+1}$.
- אחרת, קיים $c \in A$ כך ש $(a,c),(c,b) \in R^n$, עתה מסימטריות $(c,a),(b,c) \in R^n$ ולכן מהגדרת R^{n+1} נקבל $(b,a) \in R^{n+1}$.

מ.ש.ל

עתה משהוכחנו את טענת העזר קל לראות כי $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ גם הוא סימטרי: יהי $(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, אזי מהגדרת האיחוד קיים n טבעי כך ש $(a,b) \in R^n$, עתה כיוון ש R^n סימטרי נקבל כי $(b,a) \in R^n$, ולכן גם $(b,a) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, כנדרש. עתה כיוון ש $tc(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, $tc(R)$ סימטרי.

בכך הוכחנו כי $tc(R)$ רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי ולכן הוא יחס שקילות על A.

מ.ש.ל.

מסקנה: יהי R יחס רפלקסיבי וסימטרי על קבוצה A, אזי $tc(R)$ הוא יחס השקילות הקטן ביותר (ביחס להכלה) על A שמכיל את R.

הוכחה: הוכחנו כי $tc(R)$ יחס שקילות, נותר להוכיח כי הוא יחס השקילות הקטן ביותר שמכיל את R.

יהי T יחס שקילות על A שמכיל את R, אזי מההגדרה T טרנזיטיבי. עתה כיוון ש $tc(R)$ הוא היחס הטרנזיטיבי הקטן ביותר על A שמכיל את R, נקבל כי $tc(R) \subseteq T$, כנדרש.

מ.ש.ל.

עתה משסיימנו להוכיח מספר טענות לגבי הסגור הטרנזיטיבי נראה שימוש מעניין עבורו:

תזכורת: תהי קבוצה A ותת קבוצה שלה B. נגדיר יחס שקילות R_B על $P(A)$ באופן הבא:

$$\forall C_1, C_2 \in P(A) : (C_1, C_2) \in R_B \leftrightarrow C_1 \cap B = C_2 \cap B$$

(שימו לב כי זהו בדיוק R_B שהופיע בבוחן, כך שהוכחתם שזהו אכן יחס שקילות).

טענה 4

תהיינה $B_1, B_2 \subseteq A$. אזי מתקיים:

א) $R_{B_1 \cup B_2} = R_{B_1} \cap R_{B_2}$

ב) $R_{B_1 \cap B_2} = tc(R_{B_1} \cup R_{B_2})$

(7) הוכיחו את טענה 4.

הוכחה:

א) נוכיח $R_{B_1 \cup B_2} \subseteq R_{B_1} \cap R_{B_2}$: יהי $(C_1, C_2) \in R_{B_1 \cup B_2}$, אזי מתקיים $C_1 \cap (B_1 \cup B_2) = C_2 \cap (B_1 \cup B_2)$. נחתוך את שני האגפים עם B_1 ונקבל $C_1 \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1 = C_2 \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1$, עתה $(B_1 \cup B_2) \cap B_1 = B_1$ לכן $C_1 \cap B_1 = C_2 \cap B_1$. לכן $(C_1, C_2) \in R_{B_1}$. באופן דומה נוכיח $(C_1, C_2) \in R_{B_2}$ ולכן $(C_1, C_2) \in R_{B_1} \cap R_{B_2}$. בכך הוכחנו $R_{B_1 \cup B_2} \subseteq R_{B_1} \cap R_{B_2}$.
נוכיח $R_{B_1 \cup B_2} \supseteq R_{B_1} \cap R_{B_2}$: יהי $(C_1, C_2) \in R_{B_1} \cap R_{B_2}$, אזי $(C_1, C_2) \in R_{B_1} \wedge (C_1, C_2) \in R_{B_2}$, כלומר $(C_1 \cap B_1 = C_2 \cap B_1) \wedge (C_1 \cap B_2 = C_2 \cap B_2)$.
נאחד את שני השוויונים ונקבל $(C_1 \cap B_1) \cup (C_1 \cap B_2) = (C_2 \cap B_1) \cup (C_2 \cap B_2)$,
ומדיסטרביוטיביות נקבל $C_1 \cap (B_1 \cup B_2) = C_2 \cap (B_1 \cup B_2)$, כלומר $(C_1, C_2) \in R_{B_1 \cup B_2}$.
בכך הוכחנו $R_{B_1 \cup B_2} \supseteq R_{B_1} \cap R_{B_2}$.
לכן, בסה"כ מתקיים $R_{B_1 \cup B_2} = R_{B_1} \cap R_{B_2}$.

ב) נוכיח כי $R_{B_1\cap B_2}$ מקיים את הגדרת הסגור הטרנזיטיבי של $R_{B_1}\cup R_{B_2}$, כלומר $R_{B_1\cap B_2}$ הוא היחס הטרנזיטיבי הקטן ביותר המכיל את $R_{B_1}\cup R_{B_2}$. דבר ראשון, כיוון ש $R_{B_1\cap B_2}$ יחס שקילות ברור שהוא טרנזיטיבי. עתה נוכיח $R_{B_1}\cup R_{B_2}\subseteq R_{B_1\cap B_2}$: יהי $(C_1,C_2)\in R_{B_1}\cup R_{B_2}$, אזי $(C_1\cap B_1=C_2\cap B_1)\vee(C_1\cap B_2=C_2\cap B_2)$, נחתוך כל אחד מהשוויונים על $B_1\cap B_2$ ונקבל:

$$(C_1\cap B_1\cap(B_1\cap B_2)=C_2\cap B_1\cap(B_1\cap B_2))\vee$$
$$(C_1\cap B_2\cap(B_1\cap B_2)=C_2\cap B_2\cap(B_1\cap B_2))$$

עתה $B_1\cap(B_1\cap B_2)=B_1\cap B_2$ וגם $B_2\cap(B_1\cap B_2)=B_1\cap B_2$ לכן נקבל:

$$(C_1\cap(B_1\cap B_2)=C_2\cap(B_1\cap B_2))\vee(C_1\cap(B_1\cap B_2)=C_2\cap(B_1\cap B_2))$$

משני אגפי ה $\vee$ יש את אותו הביטוי לכן נקבל $C_1\cap(B_1\cap B_2)=C_2\cap(B_1\cap B_2)$, כלומר $(C_1,C_2)\in R_{B_1\cap B_2}$. כך בסה"כ הוכחנו $R_{B_1}\cup R_{B_2}\subseteq R_{B_1\cap B_2}$.

נותר להוכיח את המינימליות של $R_{B_1\cap B_2}$, כלומר שכל יחס טרנזיטיבי T על $P(A)$ שמכיל את $R_{B_1}\cup R_{B_2}$ מכיל גם את $R_{B_1\cap B_2}$. לשם כך נניח T יחס טרנזיטיבי על $P(A)$ שמכיל את $R_{B_1}\cup R_{B_2}$, ויהי $(C_1,C_2)\in R_{B_1\cap B_2}$. מטרתנו להראות $(C_1,C_2)\in T$. כיוון ש $(C_1,C_2)\in R_{B_1\cap B_2}$ מתקיים $C_1\cap(B_1\cap B_2)=C_2\cap(B_1\cap B_2)$. עתה נגדיר קבוצה חדשה, $D\in P(A)$, באופן:

$$D=(C_1\cap B_1)\cup(C_2\cap B_2)$$

ונוכיח כי $(C_1,D)\in R_{B_1}$ וגם $(D,C_2)\in R_{B_2}$.

$(C_1,D)\in R_{B_1}$: מתקיים:

$$D\cap B_1=((C_1\cap B_1)\cup(C_2\cap B_2))\cap B_1=((C_1\cap B_1\cap B_1)\cup(C_2\cap(B_2\cap B_1)))$$

עתה נציב $C_1\cap(B_1\cap B_2)=C_2\cap(B_1\cap B_2)$:

$$=(C_1\cap B_1\cap B_1)\cup(C_1\cap(B_1\cap B_2))=$$
$$(C_1\cap B_1)\cup(C_1\cap(B_1\cap B_2))=C_1\cap B_1$$

כלומר $D\cap B_1=C_1\cap B_1$ ולכן $(C_1,D)\in R_{B_1}$. באופן זהה הוכיח $(D,C_2)\in R_{B_2}$. עתה כיוון ש $(C_1,D)\in R_{B_1}$ וגם $(D,C_2)\in R_{B_2}$ אזי $(C_1,D),(D,C_2)\in R_{B_1}\cup R_{B_2}$. עתה T מכיל את $R_{B_1}\cup R_{B_2}$ לכן $(C_1,D),(D,C_2)\in T$, אך T טרנזיטיבי ולכן מכך נובע $(C_1,C_2)\in T$, כנדרש.

לכן $R_{B_1\cap B_2}$ הוא היחס הטרנזיטיבי הקטן ביותר המכיל את $R_{B_1}\cup R_{B_2}$, כלומר $R_{B_1\cap B_2}=tc(R_{B_1}\cup R_{B_2})$.

מ.ש.ל

הערה: שימו לב שסעיף א' בטענה 4 מכליל את סעיף ב' בשאלה 4 בבוחן.