מבחן בקורס הכנה למתמטיקה לקראת שנת תשפ"ג

מרצה: ד"ר ארז שיינר.   תאריך: 19/10/22

הוראות: יש לפתור כמה שיותר שאלות ולנמק היטב. כל שאלה שווה 17 נקודות. בהצלחה (=

<u>שאלה 1:</u> נגדיר את הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} x & x>0 \\ x^2 & -1\le x\le 0 \\ x+2 & x<-1 \end{cases}$$

מצאו לאילו ערכי x מתקיים אי השוויון $f\big(f(x)\big)\ge 0$

<u>שאלה 2:</u> מצאו את כל הפתרונות המרוכבים למשוואה $(1+i)z^4=1+i$

<u>שאלה 3:</u>

א. מצאו את ההיטל של הוקטור $(3,1,-1)$ על הישר בכיוון הוקטור $(1,0,1)$.

ב. מצאו את ההיטל של הוקטור $(3a,a^2,a)$ על הישר בכיוון הוקטור $(1,0,1)$, הביעו תשובתכם באמצעות הפרמטר a.

(זכרו: ההפרש בין הוקטור להיטל - מאונך לישר.)

<u>שאלה 4:</u>

א. הוכיחו את הטענה הבאה באינדוקציה: לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\ge\sqrt{n}$$

ב. מצאו n עבורו

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\ge 10$$

<u>שאלה 5:</u> יהי $0\ne a\in\mathbb{R}$, פתרו את האינטגרל

$$\int x\cdot\sin(ax)\,dx$$

<u>שאלה 6:</u>

<u>הגדרה:</u> תהי X קבוצת קבוצות של מספרים טבעיים. X נקראת <u>מפרידה</u> אם

$$\forall A\in X\exists B\in X: A\cap B=\emptyset$$

א. נסחו תנאי השקול לכך ש X אינה מפרידה.

ב. קבעו **והוכיחו** לכל אחת מן הקבוצות הבאות אם היא מפרידה:

$X=\big\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,4\}\big\}$ $Y=\big\{\{n+1,n+2\}\big|n\in\mathbb{N}\big\}$ $Z=\big\{\{1,2,\dots,n\}\big|n\in\mathbb{N}\big\}$

<u>שאלה 7:</u> הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

א. לכל שלוש קבוצות A,B,C אם $A\subseteq B$ וכן $B\cap C\ne\emptyset$ אזי $A\cap C\ne\emptyset$.

ב. לכל שלוש קבוצות A,B,C אם $A\cap(B\cap C)\ne\emptyset$ אזי $(A\cap B)\cup C\ne\emptyset$.