פתרון תרגיל 10 – טופולוגיה 2014

**שאלה 1**

1. הראו שלכל טופולוגיה יש בסיס.
2. הראו שאם  הוא אוסף של קבוצות פתוחות במרחב , המכיל בסיס  ל-, אזי  הוא בעצמו בסיס ל-.
3. יהיו  טופולוגיות על . יהי  בסיס ל-. אזי:  אם ורק אם .

**פתרון**

1. בתור בסיס ניתן לקחת את הטופולוגיה עצמה (קל לראות שהתכונות הדרושות עבור בסיס מתקיימות באופן טריוויאלי).
2.  הוא אוסף של קבוצות פתוחות ולכן נותר לבדוק את התנאי השני. תהי  ותהי . נרצה למצוא  כך ש-.  בסיס ולכן קיימת  המקיימת . מכיוון ש- נקבל ש-וקיבלנו את הדרוש.
3. אם  אזי ברור ש-  (כי  כבסיס ל-). בכיוון השני: תהי . קיימת משפחה של אינדקסים  ומשפחה של קבוצות  כך שלכל   ומתקיים  (מהגדרת בסיס). נתון כי  ולכן לכל  . אך  היא טופולוגיה ולכן .

**שאלה 2**

1. יהיו  מ"ט. יהיו  סגורות. הוכיחו כי הקבוצה  סגורה ב- .
2. יהיו  מ"ט, . הוכיחו כי  (או בסימון חלופי: ).
3. יהי  מ"ט אינסופי עם הטופולוגיה הקו-סופית. נסמן ב- את טופולוגיית המכפלה על . האם  היא הטופולוגיה הקו-סופית על ? הוכיחו או הפריכו!

**פתרון**

1. נראה שהמשלים של  הינה קבוצה פתוחה.  והיא פתוחה כאיחוד פתוחות (בסיסיות).
2. בכיוון הראשון :   
   תיהי  ונראה ש- .   
   מהגדרת הבסיס לטופולגיית המכפלה מ"ל שלכל  סביבות של  בהתאמה, מתקיים: .

תהיינה סביבות של  בהתאמה. מכיוון ש-  נקבל ש- . מכאן רואים כי: .  
הערה:  היא סביבה בסיסית, וראינו בכיתה שבהגדרת סגוֹר מספיק לרוץ על הסביבות הבסיסיות.

בכיוון השני :

על-פי סעיף א',  סגורה וכמו כן מתקיים  ולכן .

1. עבור  כלשהו נתבונן ב-. אזי  סגורה בטופולוגיית המכפלה (לפי סעיף א' + הגדרת הטופולוגיה הקו-סופית). עם זאת, הקבוצה  אינה סגורה בטופולוגיה הקו-סופית על  שכן היא לא כל המרחב ואינה סופית.

**שאלה 3**

1. יהי מ"ט. נגדיר את האלכסון של להיות . הראו שאם  סגור ב- אזי  הוא האוסדורף. (שימו לב שאת הכיוון השני של הטענה הזו הוכחנו בתרגול.)
2. מצאו דוגמה למרחב טופולוגי  עם קבוצה צפופה  ושתי פונקציות רציפות שונות  המתלכדות על .

**פתרון**

1. נניח שהאלכסון  סגור ב- ונניח בשלילה ש- אינו האוסדורף. אזי קיימות  כך **שלכל**  סביבות של  בהתאמה, . אך אז נקבל שלכל סביבה בסיסית  של  (הכוונה לקבוצה בבסיס של טופולוגיית המכפלה) מתקיים  (מדוע?) וזה מראה כי  (הראינו שבהגדרה של סגור מספיק לבדוק סביבות בסיסיות) למרות ש וזו סתירה לכך שהאלכסון  סגור.
2. נתבונן במרחב  ובקבוצה הצפופה  (מדוע היא צפופה?). נתבונן בנוסף בשתי פונקציות . הן רציפות (מדוע?), שונות ומתלכדות על .

**שאלה 4**

יהיו  מרחבים טופולוגיים. הוכיחו ש-.

**פתרון**

נגדיר פונקציה  על-ידי . נוכיח שהיא רציפה. זוהי פונקציה לתוך מרחב מכפלה ולכן מספיק לבדוק רציפות בכל רכיב. כלומר, רציפות של הפונקציות  כאשר . מתקיים:  ואלה למעשה פונקציות ההטלה על הרכיבים המתאימים (וידוע שהן רציפות).

ההופכית של  היא:  וניתן להראות שהיא רציפה (באופן דומה).

לכן  הומיאומורפיזם.

**שאלה 5**

תהי  קבוצה ונגדיר שני אוספים של תת-קבוצות של : , .

1. הוכיחו כי  הוא בסיס לטופולוגיה כלשהי  על .
2. הוכיחו ש- הוא מרחב טופולוגי האוסדורף.

**פתרון**

1. יש לבדוק שני תנאים.
2. הקבוצה  (בדקו) וכן . מתקיים .
3. יהיו .

אם  אזי חיתוכן ריק או נקודון. ובכל מקרה ניתן להציג את  כאיחוד של קבוצות מ-.

אם  אזי חיתוכן ריק או נקודון (וחזרנו למקרה הקודם).

אם  אזי . אכן, קיימים  כך ש-. מתקיים .

1. יהיו . אם  אזי נפרידן עם סביבות זרות של  בהתאמה: .

אחרת, בה"כ . הסביבות הדרושות הן , . קל לראות שהסביבות זרות.

**שאלה 6**

תהי  רציפה והפיכה. הוכיחו ש-  הומיאומורפיזם.

הדרכה מומלצת:

1. הראו שלכל  קיימים  כך ש-; בנוסף,
2. ( וגם ) או ( וגם )

[כלומר,  (במקרה הזה) מעבירה שפה לשפה.]

1. הסיקו ש- פתוחה ולכן גם הומיאומורפיזם.

**פתרון**

1.  קומפקטי וקשיר ולכן  קומפקטי וקשיר (בגלל הרציפות). תת-מרחבים קשירים וקומפקטיים של  (פרט לנקודונים) הם מהצורה  (ונשים לב ש- אינו נקודון, שכן  חח"ע). לכן ניתן להסיק שקיימים  כך ש-  .
2. נראה כעת שייתכן רק אחד משני המצבים הבאים:   
   1) , או

2) .

אמנם, אחרת קיים  כך ש-  או .

נניח ש-  (בשלילה).

מתקיים  ת"מ קשיר אבל  אינו קשיר וזו סתירה שכן פונקציה רציפה שולחת מרחב קשיר למרחב קשיר ו-  אינו קשיר. בצורה דומה ניתן להוכיח שלא יתכן ש-  כאשר .

לכן בהכרח מתקיים אחד מהמצבים 1) או 2).

1. מכל אחד מהמקרים הללו ניתן להסיק ש- .

כלומר, פתוחה בסיסית (כלומר קטע פתוח) עוברת לפתוחה. מכאן הפונקציה היא פתוחה ולכן היא הומיאומורפיזם.

**שאלה 7**

1. הוכיחו/הפריכו: לישר של סורגנפריי יש בסיס המורכב מקבוצות סגוחות.
2. הוכיחו ש- מהווה בסיס למרחב המטרי .

**פתרון**

1. ידוע שאוסף כל הקטעים מהצורה  מהווה בסיס לטופולוגיה של הישר של סורגנפריי. למעשה זה נובע ממה שהוכחתם בשאלה 6 א' בתרגיל בית 5. נראה שכל קבוצה  גם סגורה בטופולוגיה זו וזה יסיים את ההוכחה. בשאלה 7 ג' במציאת הסגור של  הוכחתם למעשה ש- סגורה. באופן דומה קל להוכיח שכל קבוצה מהצורה  סגורה בטופולוגיה זו.
2. ברור שכל הכדורים  מהאוסף האמור הן קבוצות פתוחות שכן באופן כללי בכל מ"מ כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה. נראה שמתקיים התנאי השני. תהי  פתוחה ב- ויהי . ברור ש-. כמו כן, מהגדרת קבוצה פתוחה במרחב מטרי נקבל שקיים  כך ש-. לכן קיים  כך ש-  ומכאן .