

תרגיל 8 – אינטגרלים קווים, משפט גרין ושדות משמרים

1. חשבו את אורכי המסילות הבאות

א. C הנתונה ע"י הפרמטריזציה $x(t) = \sqrt{2}(t - \sin(t))$, $y(t) = (1 - \cos(t))$, $z(t) = \cos(t)$ עבור $0 \leq t \leq \pi$.

ב. C הנתונה ע"י הפרמטריזציה $x(t) = \sqrt{t} \cos(t)$, $y(t) = \sqrt{t} \sin(t)$, $z(t) = t$ עבור $1 \leq t \leq 4$.

2. חשבו את מסת השבלול הנתון בקואורדינטות קוטביות ע"י $r(\theta) = 2\theta$ (כאשר $0 \leq \theta \leq 2\pi$) ובעל

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

3. חשבו את האינטגרלים הקווים הבאים ישירות וגם באמצעות משפט גרין

א. (ממבחן של דר' שמחה הורוביץ)

$$\oint_C x^2 y dx + (4x + 1)y^2 dy$$

כאשר C היא שפת הריבוע שקודקודיו הינם $(0, 5)$, $(0, 0)$, $(5, 5)$, $(5, 0)$, נגד כיוון השעון.

ב. (ממבחן של דר' שמחה הורוביץ)

$$\oint_C x^2 dx + xy dy$$

כאשר C היא שפת המשולש שקודקודיו הינם $(-5, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$, נגד כיוון

השעון.

4. (ממבחן של דר' שמחה הורוביץ) חשבו את $\oint_C (\sin(x^3) + y^3) dx - x^3 dy$ כאשר C היא המסילה

$$|x| + |y| = 1$$

5. תהי $f(x)$ גזירה בכל הממשיים, ותהי C שפת מעגל ברדיוס r , נגד כיוון השעון.

$$\oint_C f(x) dx + x dy$$

6. (ממבחן של דר' שמחה הורוביץ) חשבו את $\oint_C (x^2 - y^3) dx + (x^2 + \cos(y)) dy$ כאשר C היא האליפסה

$$\{(x, y) : x^2 + 4y^2 = 1\}$$

7. (ממבחן של דר' שמחה הורוביץ) יהי $\vec{F}(x, y) = 2x \sin(xy) \vec{i} + x^2 y \cos(xy) \vec{i} + x^3 \cos(xy) \vec{j}$

א. הוכיחו כי $\vec{F}(x, y)$ שדה משמר בכל \mathbb{R}^2 .

ב. עבור המסלול C המוגדר על ידי $x = \sin(t)$, $y = e^{3t}$, $0 \leq t \leq \pi$ חשבו את $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$