פתרון תרגיל 4

.1

(א) צ"ל: לכל n טבעי מתקיים

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

הוכחה באינדוקציה: עבור $n=1$: $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}$ – מתקיים.

נניח שהטענה נכונה עבור n טבעי כלשהו, ז"א:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

צ"ל שהיא נכונה גם עבור $n+1$, כלומר:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

אכן, לפי הנחת האינדוקציה,

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=$$

$$=\underbrace{\frac{n}{n+1}}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=$$

$$=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\boldsymbol{\frac{n+1}{n+2}}$$

כדרוש.

(ב) צ"ל: לכל n טבעי מתקיים

$$\frac{1}{2n} \le \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$$

הוכחה באינדוקציה: עבור $n=1$: אכן, $\frac{1}{2\cdot 1} \le \frac{1}{2}$.

נניח שהטענה נכונה עבור n טבעי כלשהו:

$$\frac{1}{2n} \le \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$$

צ"ל שהטענה נכונה עבור $n+1$, כלומר:

$$\frac{1}{2n+2} \le \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+2)}$$

אכן, לפי ההנחה:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+2)} = \underbrace{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} \ge$$

$$\ge \underbrace{\frac{1}{2n}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} = \underbrace{\frac{2n+1}{2n}}_{\ge 1}\cdot\frac{1}{2n+2} \ge \frac{1}{2n+2}$$

וסיימנו.

2.

(א) הסדרה $\{a_n\}$ נתונה ע"י

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{4} \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\cdot a_n^2 \end{cases}$$

נוכיח באינדוקציה כי לכל $n\in\mathbb{N}$: $\mathbf{0 < a_n < 1}$.

עבור $n=1$: $a_1 = \frac{1}{4}$, מתקיים. נניח שעבור n טבעי כלשהו $0 < a_n < 1$ ונוכיח כי $0 < a_{n+1} < 1$.
לפי נוסחת הנסיגה: $a_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot a_n^2$. מהנחת האינדוקציה: $0 < a_n^2 < 1^2 \Leftarrow 0 < \frac{1}{2}\cdot a_n^2 < \frac{1}{2}$. בפרט, $0 < \frac{1}{2}\cdot a_n^2 < 1$ כלומר $0 < a_{n+1} < 1$, כדרוש.

(ב) נוכיח כי הסדרה $\{a_n\}$ **מונוטונית יורדת**:
לכל n טבעי $0 < a_n < 1$ ו- $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\cdot a_n^2$, ולכן:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\cdot a_n < \frac{1}{2} < 1 \ \Rightarrow\ \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \ \Rightarrow\ \mathbf{a_{n+1} < a_n}$$

כלומר הסדרה מונוטונית יורדת.

(ג) מהסעיפים הקודמים $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת וחסומה מלרע, לכן לפי משפט היא מתכנסת לגבול סופי. לפי נוסחת הנסיגה ואריתמטיקה של גבולות:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot a_n^2 = \frac{1}{2}L^2$$

לכן $\frac{1}{2}L^2 = L \Leftarrow L^2 = 2L \Leftarrow L = 0$ או $L = 2$. אבל $0 < a_n < 1$ לכל n ולכן $0 \le L \le 1$, ונקבל ש-$\boldsymbol{L = 0}$.

.3

(א) הסדרה $\{a_n\}$ נתונה ע"י

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \end{cases}$$

נוכיח באינדוקציה כי לכל $n \in \mathbb{N}$: $\boldsymbol{0 \le a_n < 2}$.
עבור $n = 1$: $a_1 = 0$, מתקיים. נניח שעבור n טבעי כלשהו $0 \le a_n < 2$ ונוכיח כי $0 \le a_{n+1} < 2$.
לפי הנחת האינדוקציה: $2 \le 2 + a_n < 4$, לכן $\sqrt{2} \le \sqrt{2+a_n} < \sqrt{4}$, ז"א $\sqrt{2} \le a_{n+1} < 2$, ובפרט $0 \le a_{n+1} < 2$, כדרוש.

(ב) נוכיח כי הסדרה $\{a_n\}$ **מונוטונית עולה**: לכל n טבעי,

$$0 \le a_n < 2 \;\Rightarrow\; \underbrace{(a_n - 2)}_{<0}\underbrace{(a_n+1)}_{>0} < 0 \;\Rightarrow\; a_n^2 - a_n - 2 < 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a_n^2 < 2 + a_n \;\Rightarrow\; a_n < \sqrt{2+a_n} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{a_n < a_{n+1}}$$

(ג) מהסעיפים הקודמים $\{a_n\}$ מונוטונית עולה וחסומה מלעיל, לכן לפי משפט מתכנסת לגבול סופי L. לפי החסמים שמצאנו: $0 \le L \le 2$. מנוסחת הנסיגה ואריתמטיקה של גבולות:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+a_n} = \sqrt{2+L}$$

לכן $L = \sqrt{2+L} \Leftarrow L^2 - L - 2 = 0 \Leftarrow (L-2)(L+1) = 0 \Leftarrow L = 2$ או $L = -1$, וכיוון ש-$L \ge 0$ נקבל $\boldsymbol{L = 2}$.

.4

בפתרון שאלה זו ניעזר במשפט הבא: אם $a_n \to \infty$ ו-$x \in \mathbb{R}$, אז $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = e^x$.

(א)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{7}{n}\right) = e^7\cdot 1 = e^7$$

(ב)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1+2}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}\right]^2\cdot\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{-2} = (e^2)^2\cdot 1^{-2} = e^4$$

(ג)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7+3n}{9+3n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9+3n-2}{9+3n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{9+3n}\right)^{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{9+3n}\right)^{9+3n}\right]^{\frac{1}{3}}\cdot\left(1-\frac{2}{9+3n}\right)^{-3} = (e^{-2})^{\frac{1}{3}}\cdot 1^{-3} = e^{-\frac{2}{3}}$$

(ד)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2}{n^2-3}\right)^{4n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3+1}{n^2-3}\right)^{4n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{4n^2-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{n^2-3}\right]^4\cdot\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{11} = e^4\cdot 1^{11} = e^4$$