

תרגיל 10

1. תהי A תת קבוצה של $[0,1]^2$ מדידה לבג (ביחס לסיגמא אלגברה המכפלה) עם מידה $m_2(A) = 1$ כאשר $m_2 = m \times m$ ו m הינה מידת לבג. הראו כי כמעט לכל $x \in [0,1]$ הקבוצה $s_x(A) = \{y : (x, y) \in A\}$ הינה בעלת מידה $m(s_x(A)) = 1$.

2. יהי $X = Y = \mathbb{R}$ ונסתכל על \mathbb{R}^2 ביחס לסיגמא אלגברה בורל. נגדיר את הפונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \text{ and } x \leq y < x+1 \\ -1 & x \geq 0 \text{ and } x+1 \leq y < x+2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

הראו כי $\int \int f(x, y) m(dx) m(dy) \neq \int \int f(x, y) m(dy) m(dx)$. מדוע אין זו סתירה למשפט פוביני?

3. הוכיחו כי $I = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. רמז : חשבו קודם את I^2 וחשבו את האינטגרל הכפול ע"י מעבר לקורדינטות פולאריות .