

בחינה בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1 (88-132-07) – מועד ב

אוניברסיטת בר-אילן, יום ו, ו ניסן תשפה (4.4.25)

מרצה: פרופ' בועז צבאן

מתרגלים: גב' אושרית שטוסל, ד"ר פאבל שטיינר

משך הבחינה: שעתיים וחצי

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו

הנחיות

1. יש לענות בגוף השאלון בלבד. מחברת הטיוטה לא תיבדק.

2. המבחן מורכב משני חלקים.

(א) בחלק הראשון (30 נקודות) שאלות שיש לסמן עבורן נכון/לא נכון, ללא נימוק. **יש לענות על כל השאלות בחלק זה.**

כדי לעבור את המבחן יש לצבור לפחות 6 תשובות נכונות בחלק זה, ולהשלים בעזרת החלק השני ל 60 נקודות או יותר.

(ב) בחלק השני (66 נקודות) שאלות שיש לענות עליהן בכתב. **יש לענות על 2 שאלות מתוך 3.** משקל כל שאלה: 33 נקודות.

(ג) עד 4 נקודות יינתנו עבור סדר, נקיון, ואלגנטיות של התשובות. השתמשו במחברת הבחינה לטיוטה, ולאחר שמצאתם פתרון, כיתבו אותו בצורה מסודרת בגוף הבחינה.

3. בשאלה עם כמה סעיפים הנקודות מתחלקות בשווה, בקירוב, בין סעיפי השאלה.

4. אם המקום המיועד לתשובה לא מספיק, אפשר להמשיך את הפתרון במקומות הבאים, לפי סדר עדיפויות יורד:

(א) גב הדף של השאלה שאתם פותרים.

(ב) שני הדפים הנוספים בסוף המבחן (בשני העמודים של כל דף).

(ג) דף של שאלה אחרת (שני צדדיו).

(ד) בטופס נוסף שתבקשו מהבוחנים, וישודך לטופס המקורי.

בכל מקרה כזה יש לציין בכל עמוד שהסתיים היכן הפתרון ממשיך.

5. אם אתם כותבים פתרון שאלה בעמוד אחר מעמוד השאלה, יש לציין בעמוד של השאלה את מיקום הפתרון.

בהצלחה!

חלק ראשון: שאלות כן/לא

לכל אחת מהטענות הבאות, סמנו האם היא נכונה או לא נכונה. אין צורך לנמק.

א. הסידרה $\left(\sqrt{\frac{e^n}{n^e}}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

נכון / לא נכון

לא נכון. התכנסות פירושו לגבול ממשי. הסידרה שואפת לאינסוף.

ב. ייתכן שהסידרה $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ולמרות זאת הסידרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת אפילו במובן הרחב.

נכון / לא נכון

נכון. $|(-1)^n| \rightarrow 1$.

ג. אם $\sup A = 7$ אז יש בקבוצה A סידרה עולה ממש $a_n \rightarrow 7$.

נכון / לא נכון

לא נכון. ניקח $A := \{7\}$. ולא קיימת סדרה עולה l כי לא קיימת סדרה עולה

ד. $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \rightarrow \frac{1}{e}$.

נכון / לא נכון

נכון. הוכח בהרצאה, בעזרת כלל המנה.

ה. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

נכון / לא נכון

לא נכון. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ מתכנס ממשפט לייבניץ, אך הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר.

ו. אם $a_n \rightarrow 0^+$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ מתכנס.

נכון / לא נכון

לא נכון. דוגמה מההרצאה: אילו הטור $\frac{1}{1} - \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \dots$ היה מתכנס, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2})$ היה מתכנס (הכנסת סוגריים), ואז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ היה מתכנס. $\nexists$

ז. אם הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים בהחלט, אז $\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_{n-i}$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$

נכון / לא נכון

נכון. משפט מההרצאה על סכימה באלכסונים (קושי).

ח. אם f רציפה בקטע הסגור $[0, 2]$ ומתקיים $f(0) < f(2)$ אז $[f(0), f(2)] = \{f(x) : 0 \leq x \leq 2\}$.

נכון / לא נכון

לא נכון. ניקח $f(x) := x(x-1)$, $f(0) = 0$, $f(2) = 2$, אבל $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} < 0$.

ט. תהי f פונקציה גזירה בקטע הפתוח $(3, 6)$, ומקיימת $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$. אז יש נקודה $3 < c < 6$ שעבורה $f'(c) = 0$.

נכון / לא נכון

נכון. זה משפט מהרצאה. אם נשנה/נגדיר את f בקצות הקטע להיות הגבולות הנתונים, הפונקציה תהיה רציפה בקטע הסגור ומקיימת את תנאי משפט רול.

י. יהיו f, g גזירות בסביבה מנוקבת של הנקודה 0 כך ש $g'(x) \neq 0$ בסביבה זו, ומתקיים:

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

$$\text{אם } \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \text{ אז גם } \frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

נכון / לא נכון

לא נכון. $\frac{x^2 \sin(1/x) + x}{x} = x \sin(1/x) + 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ אך אין גבול לפונקציה

$$\frac{2x \sin(1/x) + \cos(1/x)(-1/x^2)x^2 + 1}{1} = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) + 1$$

בנקודה 0.

חלק שני: שאלות כתיבה

ענו בצורה מלאה ומנומקת על שתי שאלות מבין שלושת השאלות הבאות.

שאלה 1

- א. הוכח שאם $a_n \leq b_n$ לכל n אז $\overline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} b_n$.
- ב. הוכח שאם $0 < a_n$ לכל n אז $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

תשובה:

א. הוכח בהרצאה.

רעיון ההוכחה:

לוקחים תת-סידרה $a_{m_n} \rightarrow \overline{\lim} a_n$ ותת-סידרה מתכנסת במובן הרחב של b_{m_n}

ב. הוכח בהרצאה.

רעיון ההוכחה:

אם $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ סיימנו.

יהי $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < c$. ניקח $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < c$ לכל $N < n$. ($0 < q$)

$a_n < qa_{n-1} < \dots < q^{n-N-1}a_{N+1}$ לכל $N+1 < n$.

$\frac{1}{a_n} < q^{\frac{n-N-1}{n}} \frac{1}{a_{N+1}} \rightarrow q < c$ ולכן $\frac{1}{a_n} < c$ לכמעט כל n ולכן $\overline{\lim} \frac{1}{a_n} \leq c$

שאלה 2

א. הוכח או הפרך: הפונקציה $\sin(x^2)$ רציפה במידה שווה בתחום $(0, \infty)$.

ב. לכל מספר ממשי x נגדיר

$$f(x) := \begin{cases} 2 - x & x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{x} & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

מצא את כל הנקודות a שבהן הפונקציה f רציפה.

תשובה:

א. **הפרכה:** נמצא סדרות $(a_n)_{n=1}^\infty$ ו $(b_n)_{n=1}^\infty$ כך ש $\sin(a_n^2) = 1$ ו $\sin(b_n^2) = 0$, ומתקיים $a_n - b_n \rightarrow 0$.

נבטיח ש $a_n^2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ו $b_n^2 = 2\pi n$, כלומר ניקח $a_n := \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ ו $b_n := \sqrt{2\pi n}$ לכל n .

אז $\sin(a_n^2) = 1$ ו $\sin(b_n^2) = 0$.

נחשב את הגבול:

$$a_n - b_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} - \sqrt{2\pi n} = \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi n - 2\pi n}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} + \sqrt{2\pi n}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} + \sqrt{2\pi n}} \rightarrow 0,$$

כאשר השוויון הראשון נובע מכפל וחילוק בצמוד האלגברי $\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} + \sqrt{2\pi n}$ ונוסחת כפל מקוצר, והשני הוא פישוט. מתקבל שבר שבו המונה קבוע והמכנה שואף לאינסוף (סכום של שתי סדרות ששואפות לאינסוף, כל אחת מחשבון גבולות מיידית), ולכן הגבול הוא 0.

ב. תהי a נקודה שבה הפונקציה רציפה, כלומר $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.

ניקח סידרה $a \xrightarrow{x \rightarrow a} x_n \in \mathbb{Q}$ (מצפיפות הרציונלים, לכל מספר ממשי יש סידרה של רציונלים ששואפת אליו).

אז $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

$$2 - a \leftarrow 2 - x_n = f(x_n) \rightarrow f(a)$$

מחשבון גבולות, ומיחידות הגבול מתקיים $f(a) = 2 - a$.

ניקח סידרה $a \xrightarrow{x \rightarrow a} x_n \notin \mathbb{Q}$ (מצפיפות האירציונלים, לכל מספר ממשי יש סידרה של אירציונלים ששואפת אליו).

אז $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

$$\frac{1}{a} \leftarrow \frac{1}{x_n} = f(x_n) \rightarrow f(a)$$

מחשבון גבולות, ומיחידות הגבול מתקיים $f(a) = \frac{1}{a}$.

לכן $\frac{1}{a} = 2 - a$. נכפול את שני האגפים ב a : $1 = 2a - a^2$. נעביר אגפים:

$$(a - 1)^2 = a^2 - 2a + 1 = 0,$$

ולכן בהכרח $a = 1$.

לסיכום, אם יש נקודת רציפות לפונקציה, היא חייבת להיות הנקודה $a = 1$. נותר לוודא שזו אכן נקודת רציפות.

תהי $x_n \rightarrow 1$. כיון ש $f(1) = 1$, יש להוכיח ש $f(x_n) \rightarrow f(1) = 1$.

אם $x_n \in \mathbb{Q}$ לכמעט כל n : לכמעט כל n מתקיים

$$f(x_n) = 2 - x_n \rightarrow 2 - 1 = 1$$

מחשבון גבולות, וכיון שהגבול תלוי רק בזנב, גם הסידרה כולה מקיימת $f(x_n) \rightarrow 1$.

אם $x_n \notin \mathbb{Q}$ לכמעט כל n : לכמעט כל n מתקיים

$$f(x_n) = \frac{1}{x_n} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$$

מחשבון גבולות, וכיון שהגבול תלוי רק בזנב, גם הסידרה כולה מקיימת $f(x_n) \rightarrow 1$.

במקרה הנותר, יש אינסוף ערכי n שעבורם $x_n \in \mathbb{Q}$, ואינסוף ערכי n שעבורם $x_n \notin \mathbb{Q}$. לכן אפשר לפצל את הסידרה לשתי תת-סדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש $a_n \in \mathbb{Q}$ ו $b_n \notin \mathbb{Q}$ לכל n . משני המקרים הקודמים נובע ש

$$f(a_n), f(b_n) \rightarrow 1$$

וכיון שתת-הסדרות האלה מכסות את הסידרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ כולה, מתקיים גם $f(x_n) \rightarrow 1$.

לסיכום, הפונקציה רציפה רק בנקודה 1.

שאלה 3

א. הוכח שלכל מספר טבעי n מתקיים $\frac{1}{n+1} < \log(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$.

(רמז: $1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$)

ב. הוכח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log^2 n}{n}$ מתכנס. (כאשר $\log^2 x := (\log x)^2$)

תשובה:

א. יהי n מספר טבעי.

$$\log(1 + \frac{1}{n}) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{\log(n+1) - \log n}{(n+1) - n},$$

כאשר השיויון הראשון נובע מהזהות $1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$ (מכנה משותף), והשני מכללי הלוגריתם ומכך ש $(n+1) - n = 1$.

הפונקציה $\log x$ רציפה בקטע הסגור $[n, n+1]$ וגזירה בקטע הפתוח $(n, n+1)$. ממשפט הערך הממוצע, יש נקודה c כך ש $n < c < n+1$

$$\frac{\log(n+1) - \log n}{(n+1) - n} = \log'(c) = \frac{1}{c}.$$

כיון ש $n < c < n+1$, נקבל $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n}$, ולכן $\frac{1}{n+1} < \log(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$.

הוכחה מקבילה:

לפי משפט מההרצאה $(1 + \frac{1}{n})^n < e$ ולכן (מונוטוניות הלוגריתם הטבעי) $(n) \log(1 + \frac{1}{n}) < 1$ ולכן $\log(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$

לפי משפט מההרצאה $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} > e$ ולכן (מונוטוניות הלוגריתם הטבעי) $(n+1) \log(1 + \frac{1}{n}) > 1$ ולכן $\log(1 + \frac{1}{n}) > \frac{1}{n+1}$

ב. תהי $f(x) := \frac{\log^2 x}{x}$ בתחום $(0, \infty)$.

ראשית, נוכיח ש $f(n) \rightarrow 0$:

נוודא שהמנה $\frac{\log^2 x}{x}$ מקיימת בתחום $(0, \infty)$ את תנאי כלל לופיטל מהסוג $\frac{*}{\infty}$ כאשר $x \rightarrow \infty$.

הנגזרת של המכנה היא 1, ובפרט שונה מ 0 לכל x בתחום.

בנוסף, המכנה $\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$.

נחשב את גבול מנת הנגזרות:

$$\frac{(\log^2 x)'}{x'} = \frac{2 \log x \cdot \log' x}{1} = 2 \log x \cdot \frac{1}{x} = 2 \cdot \frac{\log x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0,$$

כאשר השיויון הראשון נובע מכלל השרשרת במונה, והנגזרת של x במכנה, השיויון השני נובע מהנגזרת של $\log x$, והשלישי הוא פשוט. הוכחנו בהרצאה (בעזרת כלל לופיטל) ש $\frac{\log x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$, ומחשבון גבולות גם

$$2 \cdot \frac{\log x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

מכלל לופיטל, גם $\frac{\log^2 x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$. כיון שהסידרה $(n)_{n=1}^\infty$ שואפת ל ∞ ונמצאת בתחום הפונקציה $\frac{\log^2 x}{x}$, נקבל $\frac{\log^2 n}{n} \rightarrow 0$.

שנית, נוכיח שלסידרה $(f(n))_{n=1}^\infty$ יש זנב שהוא סידרה יורדת:

בכל נקודה x בתחום מתקיים

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\log^2 x)' \cdot x - x' \cdot \log^2 x}{x^2} = \frac{2 \log x \cdot \log' x \cdot x - 1 \cdot \log^2 x}{x^2} \\ &= \frac{2 \log x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - \log^2 x}{x^2} = \frac{2 \log x - \log^2 x}{x^2}, \end{aligned}$$

כאשר השיויון הראשון הוא יישום כלל הנגזרת של מנה, השני נובע מכלל השרשרת והנגזרת של הפונקציה x , השלישי מהנגזרת של $\log x$, והאחרון הוא פשוט.

בתחום $1 < x$ מתקיים $0 = \log 1 < \log x$ ולכן בתחום זה

$$2 \log x - \log^2 x < 0 \iff 2 \log x < \log^2 x \iff 2 < \log x \iff e^2 < x,$$

כאשר השקילות הראשונה נובעת מהעברת אגף, השנייה מחילוק שני האגפים במספר חיובי, והשלישית מכך שהפונקציה $\log$ עולה ממש.

לכן, בתחום (e^2, ∞) מתקיים $f'(x) < 0$ (חלוקת מספר שלישי במספר החיובי x^2) ולכן הפונקציה $f(x)$ יורדת שם. (בכל תת־קטע סגור של התחום, הנגזרת שלילית ולכן ממשפט, הפונקציה יורדת בו, ולכן היא יורדת בכל התחום).

כיון ש $e^2 < 10$, הסידרה $(f(n))_{n=10}^\infty$ יורדת.

לסיכום, הסידרה $(f(n))_{n=10}^\infty$ מקיימת את תנאי משפט לייבניץ, ולכן הטור $\sum_{n=10}^\infty (-1)^n f(n)$ מתכנס.

כיון שהתכנסות תלויה רק בזנב, גם הטור $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n f(n)$ מתכנס, וזה מה שהיה עלינו להוכיח.

דף נוסף ראשון לפתרון שאלות (למי שהמקום בדפים הקודמים לא הספיק)

דף נוסף שני לפתרון שאלות (למי שהמקום בדפים הקודמים לא הספיק)