אלגברה לינארית הרחבת הסמכה (בן גוריון), סמטסטר ב׳ תש״פ

מבחן לדוגמה

מרצה: אחיה בר-און.
מתרגל: ד״ר דניס גלוקו.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** 4 השאלות .
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- נמקו תשובתכם.

.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה! ☺

.1

(א) נתונה מערכת משוואות לינאריות (מעל $\mathbb{R}$) התלויה בפרמטר k.

$$\begin{cases} x_1+kx_2+x_3-x_4 & =1\\ -kx_1+(2-3k)\,x_2-2x_3+(k+1)\,x_4 & =-k\\ 3x_1+3kx_2+\left(k^2+2\right)x_3-3x_4 & =4 \end{cases}$$

i. קבעו לאילו ערכי k יש למערכת הבאה פתרון יחיד, אין פתרון, או אינסוף פתרונות. נמקו כל קביעה.

פתרון: נעביר את מערכת המשוואות למטריצה

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 1 & -1 & 1\\ -k & 2-3k & -2 & k+1 & -k\\ 3 & 3k & k^2+2 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

שמייצגת אותה ונדרג

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 1 & -1 & 1\\ -k & 2-3k & -2 & k+1 & -k\\ 3 & 3k & k^2+2 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\leftarrow R_2+kR_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 1 & -1 & 1\\ 0 & 2-3k+k^2 & k-2 & 1 & 0\\ 3 & 3k & k^2+2 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-3R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 1 & -1 & 1\\ 0 & 2-3k+k^2 & k-2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & k^2-1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 1 & -1 & 1\\ 0 & (k-2)\,(k-1) & k-2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (k+1)\,(k-1) & 0 & 1 \end{array}\right)$$

כעת,

אם $k\neq -1,1,2$ המערכת בצורה מדורגת, ללא שורת סתירה ועם משתנה חופשי (x_4) ולכן יהיה אינסוף פתרונות.

אם $k=2$ נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

שאחרי החלפת שורות 2ו 3 היא

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

שגם היא מדורגת, ללא שורת סתירה ועם משתנה חופשי (x_2) ולכן גם במקרה זה יהיה אינסוף פתרונות.

אם $k=1$ או $k=-1$ נקבל בשורה השלישית שורת סתירה ולכן במקרים אלו לא יהיה פתרון.

לסיכום:

עבור $k=1$ או $k=-1$ אין פתרון.

עבור כל k אחר יהיה אינסוף פתרונות.

(אין מקרה שיהיה בו פתרון יחיד).

ii. עבור $k=0$, מצאו את כל הפתרונות למערכת הנתונה בשאלה.

פתרון: כיוון שדירוג לא משפיע על אוסף הפתרונות, נציב $k=0$ במערכת המדורגת מסעיף קודם ונקבל את

המערכת:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

נמשיך לדרג אותה לצורה קנונית

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow -R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{2} R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

כעת, $x_4 = t$ משתנה חופשי ואז:
משורה שלישית נקבל כי $x_3 + 0t = -1$ כלומר $x_3 = -1$.
משורה שניה נקבל כי $x_2 + 0.5t = -1$ כלומר $x_2 = -1 - 0.5t$.
משורה ראשונה נקבל כי $x_1 - t = 2$ כלומר $x_1 = 2 + t$.
לכן קבוצת כל הפתרונות היא

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2+t \\ -1-0.5t \\ -1 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(ב) יהא $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ ויהיו W_1, W_2, W_2 ת"מ. הוכיחו/הפריכו:

i. מתקיים $W_1 \cap (W_2 + W_3) \subseteq (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3)$.

פתרון: הפרכה:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}, W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}, W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$$

מקימות כי $W_1 \cap W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ (למשל אם $A \in W_1 \cap W_2$ אזי $A \in W_1$ ולכן $A_{1,1} = A_{1,2},\ A_{2,1} = 0, A_{2,2} = 0$ ומכיוון ש $A \in W_2$ אזי $A_{1,2} = 0$ ולכן $A_{1,1} = A_{1,2} =$ $0,\ A_{2,1} = 0, A_{2,2} = 0$ ולכן A היא מטריצת האפס). מכאן ש

$$(W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

מצד שני .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_2 + W_3$$

(שהרי $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_3$,$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_2$) וגם $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_1$ ולכן $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_1 \cap$ (W_2+W_3) ומכאן שההכלה אינה נכונה.

ii. מתקיים $W_1 \cap (W_2+W_3) \supseteq (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3)$.

פתרון: הוכחה: יהא $v \in (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3)$ ונראה כי $v \in W_1 \cap (W_2+W_3)$. כיוון ש $v \in (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3)$ קיימים $w \in (W_1 \cap W_2), u \in (W_1 \cap W_3)$ כך ש $v = w+u$. מכיוון ש $w \in W_1, u \in W_1$ נקבל כי

$$v = w+u$$

גם ב W_1 (כי יש סגירות לחיבור וקטורים במרחבים וקטורים). בנוסף $w \in W_2, u \in W_3$ ולכן $v = w+u \in W_2+W_3$. בסה"כ קיבלנו כי $v \in W_1 \cap (W_2+W_3)$ כנדרש.

2. נגדיר את המטריצה $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ התלויה בפרמטר a.

(א) עבור אילו ערכי a המטריצה הפיכה

פתרון: נדרג

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} &\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - aR_1]{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - (1+a)R_1} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & 1-a-(1+a)(a-1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

אם $a \neq 1, -2$הגענו למטריצה מדורגת ללא שורת שורת אפסים ולכן המטריצה הפיכה. אחרת, אם $a=1$ או $a=-2$ אזי נקבל שורת אפסים ואז המטריצה אינה הפיכה.

(ב) עבור איזה ערך a (אם בכלל) מתקיים כי

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

עבור ערך זה, קבעו האם A^2 הפיכה ואם כן, מצאו את ההופכית של A^2.

פתרון: אם קיים ערך a כזה אזי $A^{-1}A = I$ ולכן

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ובפרט המיקום $1,1$ שווה בשתי המטריצות. כלומר, $1 = \frac{1}{2}\left(-1\cdot a+1\cdot 1+1\cdot 1\right)$ שזה השיוויון $\frac{1}{2}\left(2-a\right)=1$ ולכן $a=0$. נציב $a=0$ ונקבל שאכן

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן התשובה היא $a=0$. כעת כיוון ש A הפיכה אזי A^2 גם הפיכה (כמכפלה של הפיכות) ומתקיים כי ההופכית של A^2 היא $A^{-1}\cdot A^{-1}$ (כמו שראינו בהרצאה) ובחישוב ישיר נקבל כי ההופכית של A^2 היא

$$\begin{aligned} A^{-1}\cdot A^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

.3

(א) מצאו לאילו ערכי $a\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $\begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 2-a \end{pmatrix} \in \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

פתרון: שאלה שקולה: מתי קיימים סקלרים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ כך ש

$$\begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 2-a \end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

שזה שקול לבדוק מתי יש פתרון למערכת $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 7 & -1 & 2 & a^2 \\ 2 & 5 & 8 & 2 & 1 & a \\ 3 & 6 & 9 & 5 & 0 & 2-a \end{array}\right)$. נדרג את המערכת ונגיע לתשובה:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 7 & -1 & 2 & a^2 \\ 2 & 5 & 8 & 2 & 1 & a \\ 3 & 6 & 9 & 5 & 0 & 2-a \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-3R_1]{R_2\leftarrow R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 7 & -1 & 2 & a^2 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & -3 & a-2a^2 \\ 0 & -6 & -12 & 8 & -6 & 2-a-3a^2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-2R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 7 & -1 & 2 & a^2 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & -3 & a-2a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a-3a^2-2\left(a-2a^2\right) \end{array}\right)$$

ולכן יש פתרון למערכת אמ"מ $2-a-3a^2-2\left(a-2a^2\right)=0$ אמ"מ (פישוט אגף שמאל) $=\left(a-1\right)\left(a-2\right)$ $a^2-3a+2=0$ אמ"מ $a=1,2$.

(ב) יהא V מ"ו ויהיו $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ קבוצה וקטורים שפורשים את V. הוכיחו/הפריכו:

i. הקבוצה $\{2v_1,v_1+v_2,v_1+v_3,v_1+v_4\}$ פורשת את V גם כן.

פתרון: הוכחה: יהא $v\in V$ וצריך להוכיח כי קיימים סקלרים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ כך ש $v=\alpha_1\left(2v_1\right)+\alpha_2\left(v_1+v_2\right)+\alpha_3\left(v_1+v_3\right)+\alpha_4\left(v_1+v_4\right)$. בסידור מחדש של אגף ימין נקבל כי

$$v=\left(2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\right)v_1+\alpha_2\left(v_2\right)+\alpha_3\left(v_3\right)+\alpha_4\left(v_4\right)$$

ושוב, המטרה היא למצוא $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ המקיימים שיוויון זה. כיוון שנתון כי $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ פורשים את V אזי קיימים סקלרים $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ כך ש $v=\beta_1(v_1)+\beta_2(v_2)+\beta_3(v_3)+\beta_4(v_4)$. נרצה למצוא $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ ע"י השוואת

$$\begin{cases}2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 & =\beta_1\\ \alpha_2 & =\beta_2\\ \alpha_3 & =\beta_3\\ \alpha_4 & =\beta_4\end{cases}$$

שזוהי מערכת משוואות עם 4 משוואות ו 4 נעלמים $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$. נדרג את המטריצה שמייצת מערכת זו

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2&1&1&1&\beta_1\\0&1&0&0&\beta_2\\0&0&1&0&\beta_3\\0&0&0&1&\beta_4\end{array}\right)\xrightarrow[R_1\leftarrow R_1-R_4]{\substack{R_1\leftarrow R_1-R_2\\R_1\leftarrow R_1-R_3}}\left(\begin{array}{cccc|c}2&0&0&0&\beta_1-\beta_2-\beta_3-\beta_4\\0&1&0&0&\beta_2\\0&0&1&0&\beta_3\\0&0&0&1&\beta_4\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftarrow\frac{1}{2}R_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&\frac{\beta_1-\beta_2-\beta_3-\beta_4}{2}\\0&1&0&0&\beta_2\\0&0&1&0&\beta_3\\0&0&0&1&\beta_4\end{array}\right)$$

ונקבל כי יש פתרון שהוא $\alpha_1=\frac{\beta_1-\beta_2-\beta_3-\beta_4}{2},\ \alpha_2=\beta_2\,,\alpha_3=\beta_3,\ \alpha_4=\beta_4$ כנדרש.

ii. אם $\text{span}\{v_1,v_2\}=\text{span}\{v_3,v_4\}$ אז $\dim V\le 2$.

פתרון: הוכחה: אם $\text{span}\{v_1,v_2\}=\text{span}\{v_3,v_4\}$ נקבל כי $v_1,v_2\in\text{span}\{v_3,v_4\}$ (שהרי $v_1,v_2\in$ $\text{span}\{v_1,v_2\}$) ומכאן ש

$$\text{span}\{v_3,v_4\}=\text{span}\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$$

(לפי מה שראינו בהרצאה: אם וקטור תלוי לינארית באחרים אזי ה span איתו או בלעדיו - שווה). כיוון ש $V=\text{span}\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ נקבל כי $\{v_3,v_4\}$ קבוצה פורשת של V ולכן $\dim V\le 2$ (שהרי אפשר לצמצם את $\{v_3,v_4\}$ לבסיס של V).

.4

(א) יהיו

$$W_1=\{p(x)\in\mathbb{R}_2[x]\mid p(0)=0\}\,,W_2=\text{span}\left\{3+2x-x^2,1+3x\right\}$$

שני תתי מרחבים של $\mathbb{R}_2[x]$.

i. הציגו את W_2 ע"י משוואות.

פתרון: נבדוק מתי פולינומים כללי $a+bx+cx^2$ שייך ל W_2. זה קורה אמ"מ קיימים סקלרים α_1,α_2 כך ש

$$\alpha_1\left(3+2x-x^2\right)+\alpha_2(1+3x)=a+bx+cx^2$$

שבסידור אגף שמאל

$$(3\alpha_1+\alpha_2)+(2\alpha_1+3\alpha_2)\,x+(-\alpha_1)\,x^2=a+bx+cx^2$$

שזה שקול (ע"י השוואת מקדמים) לכך שלמערכת

$$\begin{cases}3\alpha_1+\alpha_2 & =a\\ 2\alpha_1+3\alpha_2 & =b\\ -\alpha_1 & =c\end{cases}$$

יש פתרון (כאשר המשתנים הם α_1,α_2). נדרג את המטריצה שמייצת את המערכת ונבדוק מתי אין שורת סתירה:

$$\left(\begin{array}{cc|c}3&1&a\\2&3&b\\-1&0&c\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\left(\begin{array}{cc|c}-1&0&c\\2&3&b\\3&1&a\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3+3R_1]{R_2\leftarrow R_2+2R_1}\left(\begin{array}{cc|c}-1&0&c\\0&3&b+2c\\0&1&a+3c\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-\frac{1}{3}R_2}\left(\begin{array}{cc|c}-1&0&c\\0&3&b+2c\\0&0&a+3c-\frac{1}{3}(b+2c)\end{array}\right)$$

ולכן למערכת יש פתרון אמ"מ $a+3c-\frac{1}{3}(b+2c)=0$ כלומר $a-\frac{1}{3}b+\frac{7}{3}c=0$. לסיכום

$$W_2=\text{span}\left\{3+2x-x^2,1+3x\right\}=\left\{a+bx+cx^2\in\mathbb{R}_2[x]\mid a-\frac{1}{3}b+\frac{7}{3}c=0\right\}$$

ii. מצאו בסיס ל $W_1\cap W_2$ ומצאו את המימד של W_1+W_2.

פתרון: נתחיל עם החיתוך: כיוון שפולינום $p(x)=a+bx+cx^2\in W_1$ אמ"מ $p(0)=a=0$ נוכל לחשב את החיתוך ע"י

$$W_1\cap W_2=\text{span}\left\{3+2x-x^2,1+3x\right\}=\left\{a+bx+cx^2\in\mathbb{R}_2[x]\mid \begin{array}{c}a=0\\ a-\frac{1}{3}b+\frac{7}{3}c=0\end{array}\right\}$$

(פשוט כל הפולינומים שמקיימים את המשוואות של W_1וגם של W_2). נפתור את המערכת ע"י דירוג

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\1&-\frac{1}{3}&\frac{7}{3}&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&-\frac{1}{3}&\frac{7}{3}&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftarrow -3R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&-7&0\end{array}\right)$$

שיש לה משתנה חופשי (השלישי) שנסמנו ב $c=t$ ונקבל מהמשוואה השניה כי $b-7t=0$ כלומר $b=7t$ ומהמשוואה הראשונה נקבל $a=0$ ולכן התשובה הסופית היא

$$W_1\cap W_2=\left\{0+7t\cdot x+t\cdot x^2\mid t\in\mathbb{R}\right\}=\text{span}\left\{7x+x^2\right\}$$

ו $\left\{7x+x^2\right\}$ בסיס לחיתוך $W_1\cap W_2$. מתקיים כי $\left\{3+2x-x^2,1+3x\right\}$ בת"ל (אחד לא כפולה של השני. זה הבדיקה בשני פולינום) והם פורשים את W_2 ולכן הם בסיס ל W_2 ומכאן ש $\dim W_2=2$. בנוסף,

$$W_1=\{p(x)\in\mathbb{R}_2[x]\mid p(0)=0\}=\left\{a+bx+cx^2\in\mathbb{R}_2[x]\mid a=0\right\}$$

שמיוצג ע"י מערכת משוואות המורכבת ממשוואה אחת - $\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\end{array}\right)$ שיש לה שני משתנים חופשיים ולכן $\dim W_1=2$. כעת לפי משפט המימדים

$$\dim\left(W_1+W_2\right)=\dim W_1+\dim W_2-\dim\left(W_1\cap W_2\right)=2+2-1=3$$

(ב) (בונוס) יהא V מ"ו ויהיו $L_1=v_1+W_1, L_2=v_2+W_2$ שני ישרים שונים שנחתכים (כלומר $L_1\cap L_2\neq\emptyset$). הוכיחו:

i. הוכיחו כי קיים $v\in V$ כדש $L_1\cap L_2=v+(W_1\cap W_2)$

פתרון: כיוון שקיים $v\in L_1\cap L_2$ אזי $v\in L_1$ וגם $v\in L_2$ ולכן $L_1=v+W_1$ וגם $L_2=v+W_2$.

טענה: $L_1\cap L_2=v+(W_1\cap W_2)$.

הוכחה: נוכיח בהכלה דו-כיוונית.

$(\subseteq)$יהא $u\in L_1\cap L_2$ אזי קיימים $w_1\in W_1$ ו $w_2\in W_2$ כך ש

$$u=v+w_1,\ u=v+w_2$$

ומהשוואת $v+w_1=v+w_2$ נקבל כי $w_1=w_2$ ובפרט $w_1\in W_1\cap W_2$ ולכן $u=v+w_1\in W_1\cap W_2$. $(\supseteq)$ יהא $u\in v+(W_1\cap W_2)$ אזי קיים $w\in W_1\cap W_2$ כך ש $u=v+w$. כיוון ש $w\in W_1$ נקבל כי $u=v+w\in v+W_1=L_1$ וכיוון ש $w\in W_2$ נקבל כי $u=v+w\in v+W_2=L_2$. מכאן ש $u\in L_1\cap L_2$.

ii. $\dim\left(W_1+W_2\right)=2$

פתרון: מכיוון ש $L_1\cap L_2=v+(W_1\cap W_2)$ נקבל, לפי הגדרה כי $\dim L_1\cap L_2=\dim W_1\cap W_2$. כיוון ש $L_1\neq L_2$ נקבל כי $W_1\neq W_2$ (שהרי ראינו בסעיף הקודם כי $L_1=v+W_1, L_2=v+W_2$). כעת נסמן

$$W_1=\text{span}\left\{w_1\right\},W_2=\text{span}\left\{w_2\right\}$$

ונקבל כי

$$W_1 + W_2 = \text{span}\{w_1\} + \text{span}\{w_2\} = \text{span}\{w_1, w_2\}$$

ולכן $\dim(W_1 + W_2) \leq 2$. כיוון ש $W_1 \subseteq W_1 + W_2$ נקבל כי $1 \leq \dim(W_1 + W_2)$ ולא יתכן כי $\dim(W_1 + W_2) = 1$ כי אחרת $W_1, W_2 \subseteq W_1 + W_2$ מאותו מימד ולכן $W_1 = W_1 + W_2 = W_2$ בסתירה לכך ש $W_1 \neq W_2$. מכאן שמתקיים כי $\dim(W_1 + W_2) = 2$.

iii. קיים מישור L כך ש $L_1, L_2 \subseteq L$

פתרון: ראינו כי $L_1 = v + W_1, L_2 = v + W_2$ ולכן $L_1, L_2 \subseteq v + (W_1 + W_2)$ וראינו כי $\dim(W_1 + W_2) = 2$ ולכן $L = v + (W_1 + W_2)$ הוא מישור שמקיים $L_1, L_2 \subseteq L$.

iv. אם L' מישור כך ש $L_1, L_2 \subseteq L'$ אז $L = L'$

פתרון: נשתמש בסימונים ממוקדם $L_1 = v + W_1,\ L_2 = v + W_2$ ונוכיח את הטענה: אם $L' = v' + W'$ מישור המקיים $L_1, L_2 \subseteq L'$ אזי בפרט $v \in L'$ (כי $v \in L_1$) ולכן

$$L' = v + W'$$

(כפי שראינו בהרצאה) ומכאן ש $W_1, W_2 \subseteq W'$ (כי $v + W_1, v + W_2 \subseteq v + W'$) ולכן

$$W_1 + W_2 \subseteq W'$$

ומכיוון שהם מאותו מימד ($\dim L' = \dim W' = 2$ וראינו כי $\dim(W_1 + W_2) = 2$) נקבל כי הם שווים. כלומר $W' = W_1 + W_2$ וקיבלנו ש

$$L' = v' + W' = v + (W_1 + W_2) = L$$

כנדרש.

(במילים: שני ישרים שנחתכים - קובעים מישור יחיד).