<u>פתרון תרגיל בית 4– חדווא 1</u>

<u>שאלה 1</u>

בדוק התכנסות או התבדרות של הסדרות הבאות (הוכח את תשובתך):

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n)$.

ב. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ כאשר $a_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

<u>פתרון שאלה 1</u>

<u>סעיף א</u>

על פי קריטריון קושי להתכנסות סדרות נקבל ש

סדרת מספרים ממשיים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ קיים מספר טבעי n_0 כך שלכל $n\ge n_0$ **<u>ולכל</u>** $p\in\mathbb{N}$ מתקיים $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$.

כדי להראות שהסדרה מתבדרת יש לשלול את קריטריון קושי להתכנסות סדרות.

ז"א יש להראות שקיים $\varepsilon>0$ כך שלכל מספר טבעי n_0 קיים $n\ge n_0$ וקיים p טבעי כך ש $|a_{n+p}-a_n|\ge\varepsilon$.

נבחר $p=1$ ונשתמש בזהות $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

$$|a_{n+1}-a_n|=|\sin(n+1)-\sin n|=\left|2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{2n+1}{2}\right|.$$

יהי מספר טבעי כלשהו n_0. נבחר $n=\left\lfloor\frac{4\pi n_0-1}{2}\right\rfloor$ ונשים לב ש $n>n_0$.

$$0.54<\cos(2\pi n_0-1)\le\cos\frac{2\cdot\left(\frac{4\pi n_0-1}{2}-1\right)+1}{2}\le\cos\frac{2\cdot\left\lfloor\frac{4\pi n_0-1}{2}\right\rfloor+1}{2}\le\cos\frac{2\cdot\frac{4\pi n_0-1}{2}+1}{2}=\cos 2\pi n_0=1$$

נבחר $\varepsilon=0.5$ ונקבל שלכל n_0 קיים $n=\left\lfloor\frac{4\pi n_0-1}{2}\right\rfloor$ כך ש $n>n_0$ ו $|a_{n+1}-a_n|\ge\varepsilon$.

<u>סעיף ב</u>

$a_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

נראה שהסדרה מונטונית עולה ממש וחסומה ולכן מתכנסת.

נראה שהסדרה עולה:

$a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\Leftarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{1}{2^{n+1}}\Leftarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ בנוסף

הסדרה חיובית ולכן הסדרה מונוטונית עולה ממש.

נראה שהסדרה חסומה. נשתמש באי שוויון הממוצעים.

נסמן $x_n=1+\frac{1}{2^n}$ ואז $a_n=x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n$.

מאי שוויון הממוצעים נקבל ש $\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}\le\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n}$ ולכן:

$a_n\le\left(\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}\right)^n$.

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}=\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}{n}=$$

$$\frac{1+1+1+\ldots+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{n}=\frac{n+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{n}<\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$$

ולכן $a_n\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le e$.

הוכחנו שהסדרה מונוטונית עולה וחסומה ולכן מתכנסת.

<u>שאלה 2</u>

הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א. $a_n\xrightarrow{n\to\infty}a\Rightarrow|a_n|\xrightarrow{n\to\infty}|a|$.

ב. $a_n\xrightarrow{n\to\infty}a\Leftarrow|a_n|\xrightarrow{n\to\infty}|a|$.

ג. $a_n\xrightarrow{n\to\infty}0\Leftarrow|a_n|\xrightarrow{n\to\infty}0$.

ד. ${a_n}^2\xrightarrow{n\to\infty}a^2\Rightarrow a_n\xrightarrow{n\to\infty}a$.

ה. ${a_n}^3\xrightarrow{n\to\infty}a^3\Rightarrow a_n\xrightarrow{n\to\infty}a$.

<u>פתרון שאלה 2</u>

<u>סעיף א</u>

נכון.

נתון ש $a_n\xrightarrow{n\to\infty}a$ ומהגדרת הגבול נקבל שלכל $\varepsilon>0$ קיים מספר טבעי n_0 כל שלכל $n\ge n_0$ מתקיים $|a_n-a|<\varepsilon$.

מאי שוויון המשולש נקבל ש $||a|-|b||\le|a-b|$

יהי $\varepsilon>0$ עבור n_0 הנ"ל נקבל שלכל $n\ge n_0$ מתקיים $||a_n|-|a||\le|a_n-a|<\varepsilon\Leftarrow||a_n|-|a||<\varepsilon$.

<u>סעיף ב</u>

לא נכון.

הסדרה $a_n=(-1)^n$ מתבדרת. הסדרה $|a_n|$ קבועה ומתכנסת ל $|1|$.

קיבלנו ש $|a_n|\xrightarrow{n\to\infty}|1|$ ולא מתקיים ש $a_n\xrightarrow{n\to\infty}1$.

<u>סעיף ג</u>

נכון.

נתון ש $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ומהגדרת הגבול נקבל שלכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי n_0 כל שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $|a_n| < \varepsilon$.

יהי $\varepsilon > 0$ עבור n_0 הנ"ל נקבל שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $|a_n| < \varepsilon \Leftarrow \left||a_n|\right| < \varepsilon$.

<u>סעיף ד</u>

לא נכון. ראה דוגמא של סעיף ב.

<u>סעיף ה</u>

נכון.

נתון ש $a_n^3 \xrightarrow[n\to\infty]{} a^3$ ומהגדרת הגבול נקבל שלכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי n_0 כל שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $\left|a_n^3 - a^3\right| < \varepsilon$.

מקרה 1: $a = 0$.

יהי $\varepsilon_0 > 0$. נקבל שלכל $\varepsilon > 0$ ובפרט עבור $\varepsilon = \varepsilon_0^3$ קיים מספר טבעי n_0 כל שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $\left|a_n^3\right| < \varepsilon \Leftarrow |a_n|^3 < \varepsilon \Leftarrow |a_n| < \sqrt[3]{\varepsilon} \Leftarrow |a_n| < \varepsilon_0$.

מקרה 2: $a \neq 0$.

יהי $\varepsilon_0 > 0$. נקבל שלכל $\varepsilon > 0$ ובפרט עבור $\varepsilon = \frac{3}{4}a^2\varepsilon_0$ קיים מספר טבעי n_0 כל שלכל $n \geq n_0$

מתקיים

$$\left|a_n^3 - a^3\right| < \varepsilon \Leftarrow \left|(a_n - a)\left(\left(a_n + \frac{1}{2}a\right)^2 + \frac{3}{4}a^2\right)\right| < \varepsilon$$

$$|(a_n - a)|\left(\left(a_n + \frac{1}{2}a\right)^2 + \frac{3}{4}a^2\right) < \varepsilon \Leftarrow |a_n - a|\frac{3}{4}a^2 \leq |(a_n - a)|\left(\left(a_n + \frac{1}{2}a\right)^2 + \frac{3}{4}a^2\right) \Leftarrow |a_n - a| < \frac{4\varepsilon}{3a^2} \Leftarrow |a_n - a| < \varepsilon_0$$

.

<u>שאלה 3</u>

מצא את כל הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות. קבע מהו $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n, \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

א. $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

ב. $a_n = \sin\frac{n\pi}{6}$.

ג. $a_n = (-1)^n \cdot n$.

ד. $a_n = \arctan\left((-1)^n \cdot n\right)$.

<u>פתרון שאלה 3</u>

<u>סעיף א</u>

הסדרה מתכנסת.

נסמן $b_n = (-1)^n$ ונשים לב שהסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה.

נסמן $c_n = \frac{1}{n}$ ונשים לב ש $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

מהמשפט

אם הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה ואם $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ אז הסדרה $\{c_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לאפס.

נקבל שהסדרה $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ מתכנסת וגבולה אפס. אם סדרה מתכנסת אז הגבול העליון שווה לגבול התחתון שווה לגבול הסדרה.

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = 0$.

<u>סעיף ב</u>

עבור $n = 12k+3$ נקבל תת סדרה שגבולה 1. מכיוון שהסדרה הנתונה חסומה מלמעלה ע"י 1 נקבל ש $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = 1$.

עבור $n = 12k+9$ נקבל תת סדרה שגבולה -1. מכיוון שהסדרה הנתונה חסומה מלמטה ע"י -1 נקבל ש $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} = -1$.

<u>סעיף ג</u>

הסדרה לא חסומה מלמעלה ולא חסומה מלמטה ולכן $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \infty$ ו $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} = -\infty$.

<u>סעיף ד</u>

לסדרה יש שתי תתי סדרות שונות המתכנסות לגבולות שונים.

עבור $n = 2k$ נקבל $a_n = \arctan n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{2}$.

עבור $n = 2k-1$ נקבל $a_n = \arctan(-n) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\frac{\pi}{2}$.

ולכן $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \frac{\pi}{2}$ ו $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} = -\frac{\pi}{2}$.

<u>שאלה 4</u>

הראה לפי תנאי קושי שהסדרות הבאות מתבדרות:

א. $a_n = \frac{n\cos(\pi n) - 1}{2n}$.

ב. $a_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{(n+1)^2}$.

<u>פתרון שאלה 4</u>

על פי קריטריון קושי להתכנסות סדרות נקבל שסדרת מספרים ממשיים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ **<u>ולכל</u>** $p \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

כדי להראות שהסדרה מתבדרת יש לשלול את קריטריון קושי להתכנסות סדרות.

ז"א יש להראות שקיים $\varepsilon>0$ כך שלכל מספר טבעי n_0 קיים $n\ge n_0$ וקיים p טבעי כך ש $\left|a_{n+p}-a_n\right|\ge\varepsilon$.

<u>סעיף א</u>

נבחר $\varepsilon=\frac{1}{2}$ ונבחר $p=1$.

עבור n_0 כלשהו נבחר $n=2n_0$ ואז $n\ge n_0$.

מכיוון ש n זוגי נקבל ש $n+1$ אי זוגי ואז $\cos\left(\pi n\right)=1,\cos\left(\pi\left(n+1\right)\right)=-1$.

$$a_n=\frac{n-1}{2n},a_{n+1}=\frac{-n-1-1}{2n}\Rightarrow\left|a_{n+1}-a_n\right|=\left|\frac{-n-1-1}{2n}-\frac{n-1}{2n}\right|=\left|\frac{2n+1}{2n}\right|>\frac{1}{2}$$

<u>סעיף ב</u>

נבחר $\varepsilon=\frac{1}{8}$ עבור n_0 כלשהו נבחר n כך ש $n\ge n_0$ ונבחר $p=2n$.

$$a_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{n}{\left(n+1\right)^2}\Rightarrow a_{2n}=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{n}{\left(n+1\right)^2}+\frac{n+1}{\left(n+2\right)^2}+...+\frac{2n}{\left(2n+1\right)^2}$$

$$\left|a_{2n}-a_n\right|=\frac{n+1}{\left(n+2\right)^2}+...+\frac{2n}{\left(2n+1\right)^2}>\frac{n+1}{\left(2n+1\right)^2}+\frac{n+2}{\left(2n+1\right)^2}...+\frac{2n}{\left(2n+1\right)^2}=\frac{\left(n+1\right)+\left(n+2\right)+...+2n}{\left(2n+1\right)^2}$$

נשים לב שהאי שוויון נכון מכיוון שהגדלנו את המכנה של כל אחד מהמחוברים.

המונה בתוצאה הסופית הינו סדרה חשבונית שהאיבר הראשון הוא $n+1$ האחרון הוא $2n$ והפרש הסדרה הוא 1. ולכן נקבל במונה $\left(n+1+2n\right)\cdot\frac{n}{2}=\frac{3n^2+n}{2}$.

סה"כ קיבלנו ש $\left|a_{2n}-a_n\right|>\frac{1}{2}\cdot\frac{3n^2+n}{\left(2n+1\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3n^2+n}{n^2+n+\frac{1}{4}}>\frac{1}{8}$

<u>שאלה 5</u>

נניח ש $a_1=\frac{1}{2}$ ולכל $n\ge2$ $\left|a_n-a_{n-1}\right|<\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ הראה כי הסדרה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת וגבולה a מקיים $0<a<1$.

<u>פתרון שאלה 5</u>

תחילה נראה שהסדרה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה.

נשתמש באי שוויון המשולש $\left|a+b\right|\le\left|a\right|+\left|b\right|$.

$$\left|a_n-\frac{1}{2}\right|=\left|a_n-a_1\right|=\left|\left(a_n-a_{n-1}\right)+\left(a_{n-1}-a_{n-2}\right)+\ldots\left(a_3-a_2\right)+\left(a_2-a_1\right)\right|$$
$$\leq\left|a_n-a_{n-1}\right|+\left|a_{n-1}-a_{n-2}\right|+\ldots\left|a_3-a_2\right|+\left|a_2-a_1\right|$$
$$<\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{\frac{1}{8}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}\leq\frac{1}{4}$$

ולכן $\left|a_n-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{1}{4}\Leftarrow\frac{1}{4}\leq a_n\leq\frac{3}{4}$ סה"כ נקבל שאם הגבול קיים וגבולה a אז $0<\frac{1}{4}\leq a\leq\frac{3}{4}<1$.

נשאר להראות שהסדרה מתכנסת. נשתמש בקריטריון קושי להתכנסות סדרות.

$$\left|a_{n+p}-a_n\right|=\left|\left(a_{n+p}-a_{n+p-1}\right)+\left(a_{n+p-1}-a_{n+p-2}\right)+\ldots\left(a_{n+2}-a_{n+1}\right)+\left(a_{n+1}-a_n\right)\right|$$
$$\leq\left|a_{n+p}-a_{n+p-1}\right|+\left|a_{n+p-1}-a_{n+p-2}\right|+\ldots\left|a_{n+2}-a_{n+1}\right|+\left|a_{n+1}-a_n\right|$$
$$<\left(\frac{1}{2}\right)^{n+p+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+p}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}=\frac{\frac{1}{2^{n+2}}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n+p}}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n+p}}\right)\xrightarrow{n\to\infty}0$$

בהצלחה!!!.