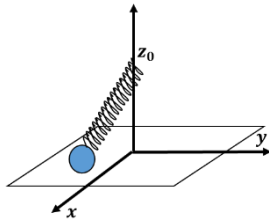


פיזיקה למתמטיקאים – 88-320 - מועד א

מרצים: ד"ר ברוך ברזל, מר ניר שרייבר  
משך המבחן: 3 שעות

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון, דפי נוסחאות שהוכנו על ידי הסטודנט (עד 15 דפים).

ענו על 3 מ-4 השאלות הבאות (רק שלוש). כל שאלה – 33 נקודות.  
ניתן לענות, בנוסף על השלוש הנ"ל, גם על שאלה 5 (שאלת בונוס - לא חובה). בונוס – 10 נקודות.  
אנא סמנו בברור על איזה שאלות בחרתם להשיב והקיפו את תשובותיכם הסופיות.



1. מסה  $m$  מאולצת לנוע במישור  $x, y$ , ומחוברת לקפיץ עם קבוע  $k$  שקצהו בנקודה  $(0, 0, z_0)$  על ציר  $z$ .

- רשמו את הלגראנז'יאן של המערכת (מומלץ להשתמש בקואורדינטות גליליות).
- מהו התנע הזוויתי? קבלו את משוואת התנועה והראו כי הוא נשמר.
- עבור תנאי התחלה עם תנע זוויתי  $L_0$ , מהו הפוטנציאל האפקטיבי של המערכת?
- מהי נקודת שווי המשקל של הפוטנציאל שמצאתם?

2. גוף בעל מסה  $m = 1$  מאולץ לנוע במישור הדו-מימדי  $(x, y)$  לאורך המסלול  $y = ax$

$$V(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 \quad (0 < a < 1 \text{ וקבוע}), \text{ תחת השפעת הפוטנציאל}$$

- רשמו את הלגראנז'יאן של המערכת באמצעות הקואורדינטה  $x$ .
- קבלו את משוואת התנועה.
- פתרו את המשוואה ומצאו את תנועת הגוף  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$  עבור תנאי התחלה שבו  $t = 0$  המסה במנוחה  $\vec{r}(t = 0) = (1, 0)$ -ב.
- מה הפתרון עבור  $a > 1$ ? (עבור תנאי התחלה זהה)

3. למערכת קוואנטית שני מצבים אפשריים  $|x\rangle$  ו- $|y\rangle$  (מנורמלים  $\langle x|x\rangle = \langle y|y\rangle = 1; \langle x|y\rangle = 0$ ) ובזמן  $t = 0$  נתון כי מצב המערכת הוא  $|x\rangle = |\psi(0)\rangle$ . נתון האופרטור

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

(מומלץ להשתמש בפורמליזם דיראק)

- תארו את מצב המערכת ב- $t = 0$  באמצעות מצבים עצמיים של  $A$ .
- מהם ערכי התצפית האפשריים של  $A$  ומהי ההסתברות למדוד כל אחד מהם? מהי התוחלת?
- בנו את  $A$  על ידי שימוש במשפט הספקטרלי והראו כי התוחלת שמצאתם בסעיף ב' שווה ל- $\langle x|A|x\rangle$ .
- התפתחות בזמן של המערכת נתונה על ידי

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = A|\psi\rangle$$

- רשמו את מצב המערכת בזמן  $t$ , דהיינו  $|\psi(t)\rangle$ , כקומבינציה ליניארית (תלויה בזמן) של וקטורים עצמיים של  $A$ .
- כמה זמן דרוש על מנת שמערכת שהחלה במצב  $|x\rangle$  תעבור למצב  $|y\rangle$ ? (רמז:  $\langle y|\psi(t)\rangle$ )

4. נתון אופרטור התלוי בזמן  $A(t)$ .

א. הוכיחו כי ההתפתחות בזמן של ערך התצפית של  $A(t)$  נתונה על ידי

$$\frac{d}{dt}\langle A \rangle = \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle - \frac{i}{\hbar} \langle [A, H] \rangle$$

(רמז: משוואת שרדינגר עבור  $\langle \psi |$  היא  $\langle \psi | H^\dagger = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi |$ )

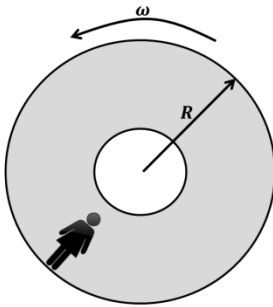
ב. השתמשו בתוצאת סעיף א' כדי להוכיח את משפט ארנפסט, שלפיו ערכי התצפית של אופרטורי התנע והמיקום מקיימים את חוקי המכניקה הקלאסית, דהיינו:

$$\frac{d}{dt}\langle p \rangle = -\left\langle \frac{dV}{dx} \right\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle x \rangle = \frac{1}{m}\langle p \rangle$$

ג. עבור אוסצילטור הרמוני קוואנטי עם פוטנציאל  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$  הראו כי התוחלת של אופרטור המיקום נעה על פי המשוואה הקלאסית

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle x \rangle = -\omega^2\langle x \rangle$$



5. **בונוס** חללית בצורת טורוס משייטת בחלל במהירות קבועה. על מנת לדמות כבידה החללית מסתובבת סביב צירה כבשרטוט (שימו לב היכן עומדים האסטרונוטים). רדיוס החללית  $R$ . מהי תדירות הסיבוב  $\omega$  על מנת לדמות כבידה עם תאוצה דומה לזו שבכדור הארץ  $(g)$ ? אסטרונוט מטפס במהירות קבועה  $v$  כלפי מעלה (דהיינו כלפי מרכז המעגל) - מהו הכוח שעליו להפעיל על מנת לנוע במסלול זה?