פונקציות מרוכבות 1

מר איתמר שטיין

הרכב הציון: בחינה, 15% תרגילי בית, 10% בוחן.

steinita@walla.com – המייל של המתרגל

באינפי 1,2 דיברנו על $f: D \to \mathbb{R}$, ובאינפי 3,4 עבדנו עם $f: D \to \mathbb{R}^n$.

בפונקציות מרוכבות נתעסק עם $f: D \to \mathbb{C}$.

מספרים מרוכבים:

ההגדרה הקלסית היא $a+bi$ כאשר $a,b \in \mathbb{R}$ ו$i^2=-1$. אפשר גם לחשוב על זה כזוגות סדורים, לקטנוניים שבינינו ושאינם מעוניינים במספרים לא ממשיים, כמו שראינו בבדידה.

אפשר לחשוב על מספרים מרוכבים גם בתור מטריצות: $a+bi \sim \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, וניתן לראות שהוא עובד ע״פ האקסיומות.

כעת להגדרות הבסיסיות:

אנחנו מכירים את הסימון הסטנדרטי $z=x+yi$. המספר הצמוד $\bar{z}=x-iy$

בנוסף: $Re(z)=x=\frac{\bar{z}+z}{2}$, $Im(z)=y=\frac{z-\bar{z}}{2}$.

כמו כן, ידוע לנו שניתן להציג כל נקודה בהצגה קרטזית (x,y) או בהצגה פולרית (r,θ). ניתן להשתמש בשיוויון $z=x+iy=r\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)=rcis(\theta)=r\cdot e^{i\theta}$, כאשר $r=\sqrt{x^2+y^2}$ ואת θ לא מגדירים באופן חח״ע, והיא מסומנת ב$\arg(Z)$. בד״כ מבקשים ש$\theta \in [-\pi,\pi]$.

ואז, אם $z=x+iy$ מתקבל ש
$$\theta=\left\{\begin{matrix} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), x>0 \\ \frac{\pi}{2}, x=0\ y>0 \\ -\frac{\pi}{2}, x=0\ y<0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi, x<0\ y>0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)-\pi, x<0\ y<0 \end{matrix}\right\}.$$

דבר אחרון: $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=r=\sqrt{z\cdot\bar{z}}$ או פשוט $|z|^2=z\cdot\bar{z}$.

תרגיל: כתבו את $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$ בצורה קרטזית:

פתרון: $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}=\frac{\left(\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^9}{\left(\sqrt{2}cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^7}=\frac{\sqrt{2}^9 cis\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{(2)^7}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}^2=2$

תרגיל: תארו את קבוצת הנקודות ב$\mathbb{C}$ המקיימות $|z-i|-|z+i|<2$.

פתרון: עבור z שלא נמצא על הציר המדומה מדובר באי שיוויון המשולש בדיוק, ולכן נתמודד עם z שנמצאים על ציר y. נגדיר $z=iy$. וכעת קל לראות שהאי שיוויון לא מתקיים רק כש$y<-1$. אפשר כמובן לפתור ע״י הצבת $z=x+iy$ ומציאת x וy.

תרגיל: מצאו את הפתרונות של המשוואה $(z-1)^3=-3$.

פתרון: הפתרון הזה פשוט, ונחפש פתרונות עבור $A^3 = -3$ כאשר $A = z - 1$. נעביר להצגה פולרית, והתרגיל פשוט משם. מתקיים כי $k = 0,1,2$, $A = \sqrt[3]{3}\, cis\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k\right)$. שלוש פתרונות ☺

תרגיל: $\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin(\theta) - \frac{1}{4}\sin(\theta)$

פתרון: נציב $\left(cis(\theta)\right)^3 = cis(3\theta)$, וע"י פתיחת סוגריים והשוואת החלקים המדומים נקבל את הדרוש בדיוק.

תרגיל: $z, y \in \mathbb{C}$ מתקיים שוויון המקבילית: $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$

פתרון: גם כן טריוויאלי למדי. לא אעתיק מהלוח.

<u>מילה על פונקציות מרוכבות:</u>

כדי להעביר פונקציה מ $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ לפונקציה $\hat{f}: \mathbb{R}^2 => \mathbb{R}^2$ נגדיר את הטרנספורציה המתאימה כדלהלן: $f(x,y) = \left(Re\left(f(x+iy)\right), Im\left(f(x+iy)\right)\right)$. ולהפך: אם $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ורוצים לתרגם אותה נשתמש $\hat{g}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ כדלהלן $\hat{g}(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ כאשר $g(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$