

תרגיל בית מספר 8

מתרגלים: חעי בן-ארי ולידור אלדב

1. תהינה A, B קבוצות אינסופיות זרות כך ש- $|A|=a, |B|=b$ ו- $a \geq b$.

מצאו את העוצמות הבאות והציגו אותן בצורה הפשוטה ביותר:

א. $|P(A) \cup P(B)|$

ב. $|A \times P(A) \times P(P(A))|$

ג. $|A^{B^{A \times B}}|$

ד. $|A \setminus (B \times A)|$

2. מצאו את העוצמות של הקבוצות הבאות והוכיחו את תשובתכם:

א. $\mathbb{C} := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ (קבוצת המספרים המרוכבים)

ב. $M_3(\mathbb{Q})$ (המטריצות מסדר 3 על 3 עם ערכים מ- \mathbb{Q})

בהינתן קבוצה A , פולינום במשתנה x מעל A הוא ביטוי מהצורה

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

כאשר $n \in \mathbb{N}$ ו- $a_n, \dots, a_0 \in A$.

נסמן את קבוצת הפולינומים במשתנה x מעל A ב- $A[x]$

ג. $\mathbb{Q}[x]$

ד. רציפה $C_0 := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ רציפה}\}$ (קבוצת כל הפונקציות הרציפות מ- \mathbb{R} ל- \mathbb{R})

רמז: היעזרו בעובדה שכל נקודה ב- \mathbb{R} היא גבול של נקודות מ- \mathbb{Q} .

3. נגדיר יחס שקילות \approx על הקבוצה $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (קבוצת הפונקציות $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) באופן הבא:

$$f \approx g \Leftrightarrow f - g \text{ רציפה. לדוגמה, } x \approx 3x \text{ כי } 2x \text{ רציפה.}$$

א. הוכיחו כי \approx הוא יחס שקילות (אין צורך להוכיח טענות מאינפי' על אריתמטיקה של פונקציות רציפות).

ב. תהי פונקציה $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. מצאו את $|[f]_{\approx}|$ (רמז: עיון בשאלה הקודמת לא יכול להזיק).

ג. מצאו את $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \approx|$.

4. סדרה חשבונית a_n ב- \mathbb{Z} היא סדרה המקיימת $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} - a_n = d$ כאשר $d \in \mathbb{Z}$ קבוע.

דוגמה: $2, -1, -4, -7, -10, \dots$ (במקרה זה $a_0 = 2$ ו- $d = -3$).

נסמן ב- $Seq(\mathbb{Z})$ את קבוצת כל הסדרות החשבוניות.

א. מצאו את $|Seq(\mathbb{Z})|$.

ב. דני וחיים משחקים משחק: דני ממקם צפרדע בזמן $t=0$ בנקודה כלשהי ב- \mathbb{Z} . הצפרדע בכל תור קופצת d צעדים ימינה (כאשר $d \in \mathbb{Z}$ קבוע, ואם הוא שלילי המשמעות היא קפיצה שמאלה). נסמן את סדרת המיקומים של הצפרדע ב- t_n . חיים בכל תור מנחש את מיקומה של הצפרדע. אם חיים מצליח בניחושו בזמן כלשהו הוא מנצח, אם הוא נכשל תמיד אז דני מנצח. מצאו אסטרטגיה מנצחת עבור חיים (כלומר שיטה שאם ינקוט בה תמיד ינצח).
רמז: סעיף א' יכול לעזור.

בהצלחה!