הגדרה: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. קבוצה $B \subset V$ בת"ל כך ש $span(B) = V$ נקראת בסיס.
הגדרה: המימד של V הוא $dim_{\mathbb{F}}V = |B|$ כאשר B בסיס. V יקרא נוצר סופית אם $dim_{\mathbb{F}}V < \infty$
משפט: ההגדרה של מימד מוגדרת היטב כלומר לכל שתי בסיסים B, B' הגדלים שלהם שווים. $|B| = |B'|$.

דוגמאות בסיסים סטנדרטים:

1. בסיס סטנדרטי של $\mathbb{F}_n[x]$ כמ"ו מעל $\mathbb{F}$ הוא $\left\{1, x, x^2, \ldots, x^n\right\}$
2. בסיס סטנדרטי של $\mathbb{F}^n$ כמ"ו מעל $\mathbb{F}$ הוא $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ n - vectores\ , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

1. יהיה $V = \mathbb{C}^2$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. מצא $dim_{\mathbb{F}}V$

כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{C}$

פתרון: קל לראות כי $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ קבוצה פורשת ובת"ל ולכן בסיס. $dim_{\mathbb{F}}V = 2$

כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

פתרון: במקרה זה צריך יותר וקטורים לבסיס כי יש פחות סקלארים להשתמש בהם.

טענה: $B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}\}$ בסיס.

הוכחה: B פורשת: יהיה $\begin{pmatrix} a+bi \\ c+di \end{pmatrix} \in V$ אזי

$$\begin{pmatrix} a+bi \\ c+di \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}.$$

B בת"ל. נניח $\alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 i \\ \alpha_3 + \alpha_4 i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{matrix} \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \leftarrow \alpha_1 + \alpha_2 i = 0 \\ \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \leftarrow \alpha_3 + \alpha_4 i = 0 \end{matrix}.$$

2. מצאו בסיס וקבעו את המימד של המרחבים הבאים:

(א) $span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

פתרון:

ברור שקבוצה $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ פורשת את ה־$span$ שלה.

נבדוק אם הקבוצה בת"ל.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -5 & -15 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -10 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ולכן

הקבוצה ת"ל.

נשים לב שהמשתנה השלישי הוא חופשי זה אומר שהוא ת"ל באחרים (כי הוא

יכול להיות שונה מאפס).
לכן נוכל לזרוק את הוקטור השלישי ועדיין המרחב הנפרש ע"י הוקטורים לא משתנה (שאלה בתרגול קודם).

לכן הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\-15\end{pmatrix}\right\}$ היא בת"ל ופורסת את המרחב שלנו.
לכן לפי הגדרה היא בסיס והמימד הוא 2.

(ב) $span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\5\\5\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

פתרון: נסמן $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\5\\5\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$
ברור שהקבוצה S פורשת את $span\left(S\right)$.
נמצא את המרחב ע" דרוג של המטריצה ששורותיה הם הוקטורים בקבוצה S:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&1&-1&-1&-1\\2&2&0&0&-1\\1&1&5&5&2\\1&-1&-1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&0&-2&-2&-1\\0&0&-2&-2&-1\\0&0&4&4&2\\0&-2&-2&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&0&-2&-2&-1\\0&0&-2&-2&-1\\0&0&4&4&2\\0&-2&-2&-2&0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&0&-2&-2&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&-2&-2&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&-2&-2&-2&0\\0&0&-2&-2&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן קיבלנו ש $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\-2\\-1\end{pmatrix}\right\}$ היא קבוצה בת"ל הפורשת את המרחב ולכן היא בסיס. מימד המרחב הוא 3.
הסבר: הוקטורים שקבלנו הם בת"ל ברור. הם חלק מ-$span\left(s\right)$ כי הם נוצרו כצ"ל של הקבוצה S והם פורשים את $span\left(s\right)$ כי בתוך S יש שני וקטורים ת"ל לכן שלושת הוקטורים הבת"ל ב-S הם הבסיס ולכן מימד S הוא 3, וכיוון שמצאנו שלושה וקטורים בת"ל במרחב ממימד שלוש, משפט השלישי חינם אומר לנו שהם בסיס למרחב.

(ג) יהיה $V=\left\{A\in\mathbb{R}^{2\times2}\mid A^{t}=A\right\}$ מרחב המטריצות הסימטריות הממשיות .

(ד) פתרון: כל מטריצה סימטרית היא מהצורה $\begin{pmatrix}a&b\\b&d\end{pmatrix}$ ולכן

$$V=\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid a,b,d\in\mathbb{R}\}=$$
$$\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a,b,d\in\mathbb{R}\}$$
$$=span_{\mathbb{R}}\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

בנוסף קל לראות כי אכן המטריצות בת"ל כי $a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+$
$$d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=0\Rightarrow a=0,\ b=0,\ d=0$$
ולכן בסיס. מסקנה $dim_{\mathbb{F}}V=3$.

משפט השלישי חינם

יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ממימד n $(dim_{\mathbb{F}}V=n)$. תהא קבוצה $B\subset V$ אם Bמקיימת 2 מתוך 3 התנאים הבאים אזי היא מקיימת גם את השלישי (ובפרט Bתהיה בסיס).

1. $\#B=n$
2. B פורשת את V
3. B בת"ל

דוגמא: $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. יהיו $B=\{v_1,v_2\}$כך ש $v_i\neq 0$ ו $v_1\neq\alpha v_2$ (כלומר v_1 אינו פרופורציונאלי ל v_2) אזי B בסיס ל V.
הוכחה: ראינו כי המימד של המרחב שווה 2 (הבסיס הסטנדרתי הוא מגודל 2). מהנתון נובע כי B בת"ל ובנוסף $\#B=2$ לכן ממשפט השלישי חינם Bבסיס.
תרגיל: $V=\mathbb{C}_2[x]$ מעל $\mathbb{C}$. $B=\{1+x,1+ix,ix^2,1+ix^2\}$ מצא $B^{'}\subset B$ כך ש $B^{'}$בסיס ל V.

פתרון: $dim_{\mathbb{F}}V=3$ מספיק למצוא 3 וקטורים ב B שהם בת"ל. נבדוק באופן כללי האם הווקטורים בת"ל.

ש"ל האם למערכת $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & i & 0 \end{array}\right)$ יש פתרון לא טריואלי:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & i-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & i \end{pmatrix}\leftarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & i \end{pmatrix}$, כלומר הוקטורים ת"ל נוכל לזרוק את הוקטור הקשור למשתנה החופשי ונשאר עם $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \end{array}\right)$ שהם בת"ל (נגיע ל־ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & i-1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$)

כלומר $B^{'}=\{1+x,1+ix,ix^2\}$ קבוצה בת"ל ולכן בסיס.

תהי $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\-15\end{pmatrix}\right\}$, השלימו את S לבסיס ל-$\mathbb{R}^3$.

פתרון: S בת"ל (קל לבדוק שהוקטורים לא פרופורציונלים)

בשביל להשלים לבסיס של $\mathbb{R}^3$ נצטרך לצרף וקטור $v\in\mathbb{R}^3\backslash span\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\-15\end{pmatrix}\right\}\right)$.

נמצא אילו וקטורים נמצאים ב- $span\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\-15\end{pmatrix}\right\}\right)$.

נבדוק מתי יש פתרון למשוואה: $a\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\4\\-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}1&1&x\\2&4&y\\-5&-15&z\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&x\\0&2&y-2x\\0&-5&z+5x\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&x\\0&1&\frac{y-2x}{2}\\0&-5&z+5x\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&x\\0&1&\frac{y-2x}{2}\\0&0&z+5x+\frac{y-2x}{2}\end{pmatrix}$$

לכן קיים פתרון רק אם מתקיים $z+5x+\frac{y-2x}{2}=z+4x+\frac{y}{2}=0$.

נבחר וקטור שלא מקיים את התנאי $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\notin span\left(S'\right)$ ולכן הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\-15\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל. מצאנו 3 וקטורים בת"ל $dim\left(\mathbb{R}^3\right)=3$ (יש את הבסיס הסטנדרטי המורכב השלוש איברים) ולכן לפי משפט השלישי חינם הקבוצה שמצאנו היא בסיס.

ההשלימו את הבסיס שמצאנו בסעיף ג משאלה קודמת לבסיס ל-M_{2x2}.

$S'=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ הבסיס שמצאנו מרחב המטריצות האלכסוניות.

נוסיף את וקטור שנמצא ב- M_{2x2} ולא נמצאת בתת מרחב של המטריצות האלכסוניות. כל מטריצה שאינה אלכסונית תעשה את העבודה דוג, $S'\cup\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}$ בסיס ל-M_{2x2}.

נימוק: $S'\cup\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}$ היא תת קבוצה בת"ל M_{2x2} ומתקיים $dim\left(M_{2x2}.\right)=4$. (הבסיס הסטנדרטי מגודל 4) ולכן לפי משפט השלישי חינם $S'\cup\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}$ בסיס ל-M_{2x2}.

הערות כלליות:

1. לכל קבוצה $B\subset V$ שפורשת את Vניתן למצוא $B'\subset B$ כך ש B' בסיס (לצמצם את B לבסיס)
2. לכל קבוצה $B\subset V$ בת"ל ניתן למצוא $B\subset B'$ כך ש B' בסיס (להרחיב את Bלבסיס)