פתרון לתרגיל 9

שאלה 1

סעיף 1

$f_n(x) = \cos^{2n}(x)$ בקטע $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

בקטע המדובר $0 \le \cos^2 x \le 1$ למעשה $0 \le \cos^2 x < 1$ חוץ מאשר בנקודה $x = 0$.
ולכן אם נשאיף את n לאינסוף נגלה בקלות שפונקציית הגבול היא

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

קיבלנו סדרת פונקציות רציפות שמתכנסת לפונקציה לא רציפה ולכן זאת התכנסות נקודתית ולא התכנסות במ"ש.

סעיף 2

$f_n(x) = \frac{\arctan x}{n}$ ב $\mathbb{R}$

קל לראות שאם נשאיף את n לאינסוף נקבל 0 ולכן פונקציית הגבול היא 0. כדי לבדוק במ"ש נשתמש ב $\lim - \sup$ ונקבל

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \{\frac{\arctan x}{n}\} = \frac{\pi}{2n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\pi}{2n} = 0$$

ולכן ההתכנסות במ"ש ב $\mathbb{R}$.

סעיף 3

$f_n(x) = x^n - x^{2n}$ בקטע $(-1, 1)$

קל לראות שעבור כל x בקטע, הפונקציה מתכנסת ל 0 כאשר n שואף לאינסוף ולכן פונקציית הגבול היא 0.

נשתמש ב $\lim - \sup$ כדי לבדוק התכנסות במ"ש. אם n אי זוגי ו x קרוב ל -1 אז $x^n - x^{2n}$ קרוב ל -2. לכן עבור n אי זוגי

$$\sup_{x \in (-1,1)} \{|x^n - x^{2n}|\} \ge 2$$

לכן אין סיכוי שהסדרה הזאת מתכנסת ל 0 (כל האיברים האי זוגיים שלה גדולים מ 2) ואין התכנסות במ"ש.

סעיף 4

$f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$ בקטע $(0, \infty)$

קל לראות שאם משאיפים את n לאינסוף הפונקציה שואפת ל 0 ולכן פונקציית הגבול היא 0. כעת נשתמש ב $\lim - \sup$

$$\sup_{x \in (0,\infty)} \{\frac{1}{nx+1}\} = 1$$

ולכן אין התכנסות במ"ש.

שאלה 2

סעיף 1

אם $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $f(x)$ בקטע I ו $g_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $g(x)$ בקטע I אז $f_n(x)+g_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $f(x)+g(x)$ בקטע I

נכון. יהי $\epsilon > 0$ ידוע כי קיים N_1 כך שלכל $n > N_1$ ו $x \in I$ מתקיים

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

וקיים N_2 כך שלכל $n > N_2$ ולכל $x \in I$ מתקיים

$$|g_n(x) - g(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

ולכן אם ניקח $N = \max\{N_1, N_2\}$ יתקיים שלכל $n > N$ ולכל $x \in I$

$$|f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| \leq \epsilon$$

סעיף ב

אם $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $f(x)$ בקטע I אז $g(x)f_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $g(x)f(x)$ בקטע I

לא נכון. נבחר $f_n(x) = \frac{1}{n}$ בקטע $(0,1)$ שזאת סדרה שמתכנסת במ"ש ל 0 ונבחר $g(x) = \frac{1}{x}$ אז $f_n(x)g(x) = \frac{1}{nx}$ לא מתכנס במ"ש ל 0 בקטע $(0,1)$ (קל לראות לפי $\lim - \sup$)

סעיף ג

אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במידה שווה ל $S(x)$ בקטע I אז הסדרה $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ל 0 בקטע I.

נכון.

נגדיר $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ לפי הנתון $S_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $S(x)$ ולכן גם $S_{n-1}(x)$ מתכנסת במ"ש ל $S(x)$. לכן $f_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$ מתכנסת במ"ש (לפי סעיף א') ל $S(x) - S(x) = 0$ כנדרש.

סעיף ד

יהי $\epsilon > 0$. צריך למצוא $\delta > 0$ כך ש

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

ידוע כי קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ ו $x \in I$ מתקיים ש

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

לפי הרציפות במ"ש של f_n, ידוע כי יש $\delta > 0$ עבורו מתקיים

$$|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3}$$

עבור δזה באמת יתקיים שאם $|x-y| \leq \delta$ אז

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) + f(y)| < \epsilon$$

כנדרש.

שאלה 3

נניח בשלילה כי f_n מתכנסת במ"ש ב (a,b) ונוכיח שהיא מתנסת במ"ש ב $[a,b]$ בסתירה לנתון. לפי ההנחה שלנו

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(a,b)} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

אבל נשים לב ש

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \max\{ \sup_{x\in(a,b)} |f_n(x) - f(x)|, |f_n(a) - f(a)|, f_n(b) - f(b)|\}$$

נשים לב שכאשר $n \to \infty$ מתקיים ש

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(a,b)} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(a) - f(a)| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(b) - f(b)| = 0$$

(הראשון מהתכנסות במ"ש ב (a,b), והשני והשלישי מהתכנסות נקודתית ב $[a,b]$) ולכן

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \max\{ \sup_{x\in(a,b)} |f_n(x) - f(x)|, |f_n(a) - f(a)|, f_n(b) - f(b)|\} = 0$$

כלומר סדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש ב $[a,b]$ בסתירה לנתון.

שאלה 4

סעיף א

קל לבדוק ש $\ln(1+x) \leq x$ (לפי הנגזרות $\frac{1}{1+x} \leq 1$) בתחום $[0,\infty)$ ולכן

$$\ln(1 + \frac{x^2}{n\ln^2 n}) \leq \frac{x^2}{n\ln^2 n} \leq \frac{a^2}{n\ln^2 n}$$

הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^2}{n\ln^2 n}$$

מתכנס (לפי מבחן העיבוי, או לפי המבחן האינטגרלי לטורים) ולכן טור הפונקציות שלנו מתכנס במ"ש בקטע לפי מבחן ה M של ווירשטראס.

סעיף ב

ננסה למצוא מקסימום לפונקציה

$$\frac{x^2}{e^{nx}}$$

אם נגזור נקבל

$$\frac{2xe^{nx} - nx^2e^{nx}}{e^{2nx}}$$

נשווה ל 0 ונסיק ש

$$2x - nx^2 = 0$$

כלומר $x = 0$ או $x = \frac{2}{n}$ קל לראות ש $x = \frac{2}{n}$ הוא מקסימום ולכן

$$\frac{x^2}{e^{nx}} \leq \frac{4}{n^2e^2}$$

היות והטור $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2e^2}$ מתכנס, טור הפונקציות מתכנס במ"ש לפי מבחן ה M של ווירשטראס.

סעיף ג

נשים לב שאם $x > 0$ אז $\frac{1}{1+x^2} < 1$ ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = x\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1-\frac{1}{1+x^2}} = x\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{x^2}{1+x^2}} = \frac{1}{x}$$

כלומר הטור מתכנס נקודתית ל $\frac{1}{x}$ כאשר $x > 0$.
כאשר $x = 0$ קל לראות שהטור מתכנס נקודתית ל 0.
ולכן בסה"כ הטור מתכנס נקודתית ל

$$\begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

היות והפונקציות $\frac{x}{(1+x)^n}$ רציפות והן מתכנסות נקודתית לפונקציה לא רציפה, ההתכנסות היא לא במ"ש.

שאלה 5

בחר קטע סגור $[-R, R]$ כך ש $R < 1$. אנחנו יודעים שבקטע זה

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

טור הנגזרות של $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ הוא

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

והוא כמובן מתכנס במ"ש בקטע $[-R,R]$ לפי מבחן ה M של ווירשטראס (כי $nx^{n-1} \leq nR^{n-1}$ והטור $\sum_{n=1}^{\infty} nR^{n-1}$ כמובן מתכנס כי $R<1$).
לכן לפי משפט גזירה איבר איבר מתקיים ש

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = (\frac{x}{1-x})' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

כלומר

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

שוב טור הנגזרות

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}$$

מתכנס במ"ש בקטע לפי מבחן ה M של ווירשטראס. ולכן שוב ניתן למוא אותו עם גזירה איבר איבר

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{(1-x)^2+2(1-x)x}{(1-x)^4} = \frac{1-2x+x^2+2x-2x^2}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

מכאן קיבלנו ש

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

זה נכון לכל תת קטע $[-R,R]$ של $(-1,1)$ וזה בדיוק אומר שהנוסחא נכונה לכל הקטע $(-1,1)$

שאלה 6

נסתכל על הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)}x^n$$

בתחום $[\frac{1}{6},\frac{5}{6}]$ וננסה למצוא נוסחא לסכומו (מתוך כוונה להציב בו $x=\frac{1}{2}$).

ידוע כי

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$

במידה שווה בתחום המדובר
ולכן

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-t} = -\ln(1-x)$$

כלומר

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln(1-x)$$

ולכן

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

טור הנגזרות הוא

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n-1}$$

והוא מתכנס במ"ש בקטע המדובר ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n-1} = -(\frac{\ln(1-x)}{x})' = -\frac{-\frac{x}{1-x} - \ln(1-x)}{x^2} = \frac{1}{(1-x)x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2}$$

כלומר

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \frac{1}{(1-x)} + \frac{\ln(1-x)}{x}$$

ולכן

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n} = 2 + 2\ln(\frac{1}{2})$$