מתמטיקה בדידה 88-195 תשע"ד

## תרגיל בית מספר 9

מתרגלים: רועי בן-ארי ולידור אלדבח

**1.** תהי $X$ קבוצה לא ריקה. נאמר כי קבוצה $\mathcal{F}\subseteq P(X)$ היא <u>מסנן</u> (filter) מעל $X$ אם היא מקיימת את התנאים הבאים:

א. $\mathcal{F}\neq\varnothing$

ב. $\varnothing\notin\mathcal{F}$

ג. $\forall A,B\in P(X)\left(A,B\in\mathcal{F}\rightarrow A\cap B\in\mathcal{F}\right)$

ד. $\forall A,B\in P(X)\left(A\in\mathcal{F}\wedge A\subseteq B\rightarrow B\in\mathcal{F}\right)$

דוגמה: עבור $X=\{1,2,3\}$, אם ניקח $\mathcal{F}=\{\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$, אזי $\mathcal{F}$ היא מסנן מעל $X$.

ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו: לכל קבוצה לא ריקה $X$, קיים מסנן $\mathcal{F}$ מעל $X$ מקסימלי ביחס להכלה.

ב. יהי $\mathcal{F}$ מסנן מקסימלי ביחס להכלה מעל $X$, הוכיחו כי לכל $B\subseteq X$ מתקיים $B\in\mathcal{F}$ או $B^c\in\mathcal{F}$.

רמז: הניחו בשלילה וסתרו את המקסימליות של $\mathcal{F}$.

פתרון:

א. נסמן ב- $T$ את קבוצת כל המסננים מעל $X$, עם יחס הסדר הכלה.
$T$ לא ריקה כי $\{X\}\in T$. עתה תהי שרשרת $\{C_i\}_{i\in I}\subseteq T$, מתקיים כי $\bigcup_{i\in I}C_i\in T$, נוכיח זאת. צריך להוכיח כי $\bigcup_{i\in I}C_i$ מסנן:

1) $\bigcup_{i\in I}C_i\neq\varnothing$

2) $\varnothing\notin\bigcup_{i\in I}C_i$, כי אחרת קיים $i\in I$ כך ש $\varnothing\in C_i$, בסתירה.

3) יהיו $A,B\in\bigcup_{i\in I}C_i$, אזי קיימים $i,j\in I$ כך ש $A\in C_i\wedge B\in C_j$, עתה $\{C_i\}_{i\in I}$ שרשרת ולכן בה"כ $C_i\subseteq C_j$, ולכן $A,B\in C_j$, ולכן $A\cap B\in C_j$ ולכן $A\cap B\in\bigcup_{i\in I}C_i$.

4) יהיו $A\in\bigcup_{i\in I}C_i$ ו $B\supseteq A$. קיים $i\in I$ כך ש $A\in C_i$ ולכן $B\in C_i$, כלומר $B\in\bigcup_{i\in I}C_i$.

.

לכן $\bigcup_{i\in I} C_i \in T$ והוא חסם מלעיל של השרשרת.

הוכחנו כי $T$ לא ריקה ולכל שרשרת קיים חסם מלעיל, לכן על פי הלמה של צורן קיים איבר מקסימלי ב $T$, כלומר קיים מסנן מקסימלי ביחס להכלה מעל $X$.

ב. אם $B\in\mathcal{F}$ סיימנו, לכן נניח $B\notin\mathcal{F}$ ונוכיח $B^c\in\mathcal{F}$. נגדיר:

$$A\overline{\cap}E := \{C\cap D \mid C\in A\wedge D\in E\}$$
$$\uparrow B := \{C\in P(X) \mid \exists B'\in B\left(B'\subseteq C\right)\}$$

עתה נביט ב-

$$\mathcal{F}'=\uparrow\left(\mathcal{F}\overline{\cap}\{B\}\right)$$

$\mathcal{F}\subseteq\mathcal{F}'$ לכן $\mathcal{F}'$ אינו מסנן מהמקסימליות של $\mathcal{F}$, אבל $\mathcal{F}'$ מקיים את דרישות א', ד'. כמו כן $\mathcal{F}'$ מקיים את תנאי ג': תהיינה $A,C\in\mathcal{F}'$, אזי קיימות $A'\subseteq A, C'\subseteq C$ כך ש- $A',C'\in\mathcal{F}\overline{\cap}\{B\}$. עתה $\mathcal{F}\overline{\cap}\{B\}$ סגור לחיתוכים (מקומוטטיביות חיתוך) ולכן $A'\cap C'\in\mathcal{F}\overline{\cap}\{B\}$ אבל $A'\cap C'\subseteq A\cap C$, לכן $A\cap C\in\uparrow\left(\mathcal{F}\overline{\cap}\{B\}\right)$.

עתה אם $\varnothing\notin\mathcal{F}'$, אז $\mathcal{F}'$ מסנן המכיל ממש את $\mathcal{F}$, בסתירה. לכן $\varnothing\in\mathcal{F}'$. כלומר $\varnothing\in\uparrow\left(\mathcal{F}\overline{\cap}\{B\}\right)$, מכאן נובע $\varnothing\in\mathcal{F}\overline{\cap}\{B\}$. כלומר קיים $C\in\mathcal{F}$ כך ש $\varnothing=C\cap B$. לכן $C\subseteq B^c$ ולפי תכונה ד', $B^c\in\mathcal{F}$ כנדרש.

**2.** מצאו את מספר הפתרונות של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1001$ כאשר $x_i$ (עבור $1\le i\le 5$) הם:

א) מספרים שלמים אי-שליליים.

ב) מספרים טבעיים אי-זוגיים.

פיתרון:

א) $\binom{1001+4}{4}$ (כוכביות ומחיצות).

ב) נתרגם לבעייה השקולה הבאה:

$$(x_1-1)/2+(x_2-1)/2+(x_3-1)/2+(x_4-1)/2+(x_5-1)/2=1001-5/2.$$

עתה נגדיר $y_i=(x_i-1)/2$. נשים לב כי עתה $y_i$ שלמים אי-שליליים ולכן $x_i=2y_i+1$ טבעיים אי-זוגיים.

נותר למצוא את מספר הפתרונות ל- $\sum_{i=1}^{5} y_i=498$, מספר הפתרונות הוא $\binom{498+4}{4}$.

**.3** מצאו כמה מספרים עשרוניים, בעלי $20$ ספרות לכל היותר, הם בעלי סכום ספרות:

א) $9$ בדיוק.

ב) $9$ לכל היותר.

ג) $18$ בדיוק.

פיתרון:

א) $\binom{9+19}{19}$ (כוכביות ומחיצות).

ב) $\binom{9+20}{20}$ (כוכביות ומחיצות עם הוספת משתנה נוסף כך שסכום הספרות בלעדיו יהיה קטן או שווה ל-9).

ג) נחלק כמו קודם את 18 ל-20 משתנים $x_1+\ldots+x_{20}=18$.

נשים לב שספרה יכלה לקבל מספר גדול מ-9.

כמו-כן נשים לב שאם אחד מהמשתנים גדול מ-9 הוא היחיד.

נגדיר $a=\binom{18+19}{19}$ להיות מספר כל הפתרונות ואת $b=20\cdot\binom{8+19}{19}$

מספר הפתרונות בהן משתנה מסויים קיבל ערך גדול מ-9 (הכפולה ב-20 היא עבור הבחירה של המשתנה שערכו גדול מ-9).

מספר הפתרונות בהם לכל משתנה יש ערך קטן מ-10 הוא $(a-b)$.

**.4** מספר $n$ יקרא חופשי מריבועים אם לא קיים $k\geq 2$ טבעי כך ש-$k^2 \mid n$.

מצאו כמה מספרים חופשיים מריבועיים יש בין $1$ ו-$120$.

פיתרון:

א) נשים לב שההגדרה עבור חופשי מריבועים שקולה לכך שלא קיים $p$ ראשוני כך ש-$p^2$ מחלק אותו. לכן מספר בין 1 ל-120 חופשי מריבועים אם הוא לא מתחלק באף אחד מ-$2^2,3^2,5^2,7^2$.

נגדיר $A_i$ להיות קבוצת הכפולות של $i^2$ בין 1 ל-120.

צריך למצוא את הגודל של :

$$\left|(A_2)^c\cap(A_3)^c\cap(A_5)^c\cap(A_7)^c\right|=\left|\left(\bigcup_{i\in\{2,3,5,7\}}A_i\right)^c\right|$$

נשים לב ש-$A_i\cap A_j=A_{i\cdot j}$

$$\left|\left(\bigcup_{i\in\{2,3,5,7\}}A_i\right)^c\right|=120-\left[\left(\sum_{i\in\{2,3,5,7\}}|A_i|\right)-\left(\sum_{i<j\in\{2,3,5,7\}}|A_{i\cdot j}|\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{i<j<k\in\{2,3,5,7\}}|A_{i\cdot j\cdot k}|\right)-\left(|A_{210}|\right)\right]=75$$

**בהצלחה!**