תרגיל בית 10 אינפי 3

1. הוכיחו כי המשוואות הבאות מגדירות את z כפונקציה של x,y בסביבת הנקודה $a=(a_1,a_2,a_3)$ וחשב את $z_x(a_1,a_2), z_y(a_1,a_2), z_{xy}(a_1,a_2)$.

(א)

$$F(x,y,z)=y^2+xy+z^2-e^z-4=0$$

$$a=(0,e,2)$$

פתרון.

$$F_z=2z-e^z$$

$$F_z(0,e,2)=4-e^2\neq 0$$

ולכן המשוואה מגדירה את z כפונקציה של x,y.

$$F_x=y,\quad F_y=2y+x$$

ולכן בסביבת הנקודה $(0,e)$ מתקיים ש:

$$z_x(x,y)=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{y}{e^z-2z},\quad z_y(x,y)=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{2y+x}{e^z-2z}$$

ולכן

$$z_x(0,e)=\frac{e}{e^2-4},\quad z_y(0,e)=\frac{2e}{e^2-4}$$

כעת

$$z_{xy}(x,y)=(\frac{2y+x}{e^z-2z})'_y=\frac{2(e^z-2z)-(e^z-2z)z_y(2y+x)}{(e^z-2z)^2}$$

$$z_{xy}(0,e)=\frac{2(e^2-4)-(e^2-4)\frac{2e}{e^2-4}(2e)}{(e^2-4)^2}=\frac{2(e^2-4)-4e^2}{(e^2-4)^2}=\frac{-2e^2-8}{(e^2-4)^2}$$

(ב)

$$xz+y\ln z+x^2=0$$

$$a=(-2,0,2)$$

פתרון.

$$F_z=x+\frac{y}{z}$$

$$F_z(-2,0,2)=-2\neq 0$$

ולכן המשוואה מגדירה את z כפונקציה של x, y.

$$F_x = z + 2x, \quad F_y = \ln z$$

ולכן בסביבת הנקודה $(-2, 0)$ מתקיים ש:

$$z_x(x,y) = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{z+2x}{x+\frac{y}{z}}, \quad z_y(x,y) = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{\ln z}{x+\frac{y}{z}}$$

ולכן

$$z_x(-2,0) = -\frac{2-4}{-2} = -1, \quad z_y(-2,0) = -\frac{\ln 2}{-2} = \frac{\ln 2}{2}$$

כעת

$$z_{xy}(-2,0) = (-\frac{z+2x}{x+\frac{y}{z}})'_y|_{(-2,0)} = -\frac{z_y(x+\frac{y}{z}) - (\frac{z-yz_y}{z^2})(z+2x)}{(x+\frac{y}{z})^2}|_{(-2,0)} =$$
$$-\frac{\frac{\ln 2}{2}(-2) - (\frac{2}{4})(2-4)}{4} = \frac{-\ln 2 + 1}{4}$$

2. נתונה משוואה $\sqrt{x^2 + y^5 + \cos z - 1} = z^4 + 1$.

(א) האם המשוואה מגדירה בסביבת $(-1, 0, 0)$ את x כפונקציה של y, z?

פתרון. נכתוב

$$F(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^5 + \cos z - 1} - z^4 - 1$$

$$F_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^5 + \cos z - 1}}$$

לכן

$$F_x(-1,0,0) = \frac{-1}{\sqrt{1+0+1-1}} = -1 \neq 0$$

ולכן F מגדירה את x כפונקציה של y, z.

(ב) האם המשוואה מגדירה בסביבת $(-1, 0, 0)$ את y כפונקציה של x, z?

פתרון.

$$F_y = \frac{5y^4}{2\sqrt{x^2 + y^5 + \cos z - 1}}$$

לכן

$$F_y(-1,0,0) = 0$$

ולכן לא ניתן להשתמש במשפט הפונקציה הסתומה. אבל, קל לראות שניתן לחלץ את y מהמשוואה

$$y =^5 \sqrt{(z^4+1)^2 - x^2 - \cos z + 1}$$

ולכן המשוואה מגדירה את y כפונקציה של x, z.

(ג) האם המשוואה מגדירה בסביבת $(-1,0,0)$ את z כפונקציה של x, y?

פתרון.

$$F_z = \frac{-\sin z}{2\sqrt{x^2+y^5+\cos z - 1}} - 4z^3$$

ולכן

$$F_z(-1,0,0) = 0$$

לכן לא ניתן להשתמש במשפט הפונקציה הסתומה. אבל אפשר לשים לב שאם $(-1-\delta, 0, t)$ הוא פתרון למשוואה עבור $\delta, \epsilon > 0$ אז גם $(-1-\delta, 0, -t)$ הוא פתרון למשוואה. כלומר, לכל סביבת ϵשל $(-1,0,0)$ קיים איזשהו $\delta > 0$ ושני ערכים z_1, z_2 כך ש $(-1-\delta, 0, z_1)$ ו $(-1-\delta, 0, z_2)$ נמצאים בסביבה ו

$$F(-1-\delta, 0, z_1) = F(-1-\delta, 0, z_2) = 0$$

ולכן F לא מגדירה את z כפונקציה של x, y.

3. נניח כי המשוואה $F(x,y,z) = 0$ מקיימת את תנאי הפונקציה הסתומה לפי כל אחד מן המשתנים בנקודה $a = (a_1, a_2, a_3)$ ולכן מגדירה פונקציות

$$x = x(y,z), \quad y = y(x,z), \quad z = z(x,y)$$

מצאו את (המספר)

$$\frac{\partial x}{\partial y}(a_2,a_3) \cdot \frac{\partial y}{\partial z}(a_1,a_3) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(a_1,a_2)$$

פתרון. לפי משפט הפונקציה הסתומה:

$$\frac{\partial x}{\partial y}(a_2,a_3) = -\frac{F_y(a)}{F_x(a)}, \quad \frac{\partial y}{\partial z}(a_1,a_3) = -\frac{F_z(a)}{F_y(a)}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(a_1,a_2) = -\frac{F_x(a)}{F_z(a)}$$

ולכן ברור ש

$$\frac{\partial x}{\partial y}(a_2,a_3) \cdot \frac{\partial y}{\partial z}(a_1,a_3) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(a_1,a_2) = -\frac{F_y(a)}{F_x(a)} - \frac{F_z(a)}{F_y(a)} - \frac{F_x(a)}{F_z(a)} = -1$$

4. (א) הוכיחו כי קיים כדור כלשהוא $B \subseteq \mathbb{R}^4$ שמרכזו ב $(2,1,-1,-2)$ וקיימות פונקציות $u,v : B \to \mathbb{R}$ הגזירות ברציפות על B. כך ש

$$u(2,1,-1,-2) = 4, \quad v(2,1,-1,-2) = 3$$

ולכל נקודה $(x,y,z,w) \in B$ מתקיים

$$u^2+v^2+w^2 = 29, \quad \frac{u^2}{x^2}+\frac{v^2}{y^2}+\frac{w^2}{z^2} = 17$$

פתרון. השאלה היא בעצם האם המשוואות

$$u^2+v^2+w^2 = 29, \quad \frac{u^2}{x^2}+\frac{v^2}{y^2}+\frac{w^2}{z^2} = 17$$

מגדירות את u,v כפונקציות של x,y,z,w בסביבת $(2,1,-1,-2,4,3)$

לפי משפט הפונקציה הסתומה צריך לבדוק את המטריצה

$$\begin{pmatrix} F_{1u} & F_{1v} \\ F_{2u} & F_{2v} \end{pmatrix}$$

$$F_1 = u^2+v^2+w^2-29$$

ולכן

$$F_{1u} = 2u, \quad F_{1v} = 2v$$

ולכן

$$F_{1u}(2,1,-1,-2,4,3) = 8, \quad F_{1v}(2,1,-1,-2,4,3) = 6$$

באותו אופן

$$F_2 = \frac{u^2}{x^2}+\frac{v^2}{y^2}+\frac{w^2}{z^2}-17$$

ולכן

$$F_{2u} = 2\frac{u}{x^2}, \quad F_{2v} = 2\frac{v}{y^2}$$

ולכן

$$F_{2u}(2,1,-1,-2,4,3) = 2, \quad F_{2v}(2,1,-1,-2,4,3) = 6$$

קיבלנו את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

שהיא הפיכה כי הדטרמיננטה שלה היא $48-12=36$. לכן לפי משפט הפונקציה הסתומה מתקיים כי F מגדירה את u,v כפונקציה של x,y,z,w.

(ב) מצאו את

$$u_x(2,1,-1,-2),\quad v_x(2,1,-1,-2),\quad u_z(2,1,-1,-2),\quad v_z(2,1,-1,-2)$$

פתרון. לפי משפט הפונקציה הסתומה,

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \end{pmatrix}$$

לכן נחשב את F_{1x} ואת F_{2x}

$$F_{1x}=0,\quad F_{2x}=-2\frac{u^2}{x^3}$$

לכן

$$F_{1x}(2,1,-1,-2,4,3)=0,\quad F_{2x}(2,1,-1,-2,4,3)=-4$$

כלומר

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

באותו אופן:

$$F_{1z}=0,\quad F_{2z}=-2\frac{w^2}{z^3}$$

לכן

$$F_{1z}(2,1,-1,-2,4,3)=0,\quad F_{2z}(2,1,-1,-2,4,3)=8$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_z \\ v_z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_z \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 48 \\ -64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{16}{9} \end{pmatrix}$$

5. תהי
$$f(x,y,z)=(e^x\sin z, e^y\cos z, e^z xy)$$
הוכח כי f הפיכה מקומית ב $(0,1,0)$ ומצא את מטריצת יעקובי של f^{-1} בנקודה $(0,e,0)$.

פתרון. נחשב את מטריצת יעקובי של f בעזרת נגזרות חלקיות
$$\begin{pmatrix} e^x\sin z & 0 & e^x\cos z \\ 0 & e^y\cos z & -e^y\sin z \\ e^z y & e^z x & e^z xy \end{pmatrix}$$
נציב את הנקודה $(0,1,0)$ ונקבל
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
זאת מטריצה הפיכה ולכן f הפיכה מקומית ב $(0,1,0)$. מטריצת יעקובי של ההפוכית שלה היא המטריצה ההופכית
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

תרגילי רשות - אין צורך להגיש.

6. תהי פונקציה $F(x,y)$ המוגדרת על תחום D ובעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר 2 בתחום D. נתונה נקודה $(x_0,y_0)\in D$ כך שמתקיים
$$F(x_0,y_0)=0,\quad F_x(x_0,y_0)=0,\quad F_y(x_0,y_0)\neq 0,\quad F_{xx}(x_0,y_0)\neq 0$$
הוכיחו כי $F(x,y)=0$ אינה מגדירה את x כפונקציה של y בסביבת הנקודה (x_0,y_0).
(רמז: הוכיחו שהמשוואה מגדירה את y כפונקציה של x ומצא תכונות של פונקציה זו).

פתרון. היות ו $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ ברור ש F מגדירה את y כפונקציה של x.לפי נוסחת הגזירה:
$$y_x(x_0)=-\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$$

לפי הנתונים $F_x(x_0,y_0)=0, \quad F_y(x_0,y_0)\neq 0$ זה בהכרח מחייב

$$y_x(x_0)=0$$

כעת נגזור שוב לפי x את השוויון:

$$y_{xx}(x)=-(\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)})'_x=-\frac{(F_{xx}(x,y)+F_{xy}(x,y)y_x)F_y(x,y)-(F_{xy}(x,y)+F_{yy}(x,y)y_x)F_x(x,y)}{(F_y(x,y))^2}$$

ולכן:

$$y_{xx}(x_0)=-\frac{F_{xx}(x_0,y_0)F_y(x_0,y_0)}{(F_y(x_0,y_0))^2}=-\frac{F_{xx}(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}\neq 0$$

לכן x_0 היא נקודת מינימום או מקסימום של y. היות ו y רציפה, לכל סביבת ϵ של y_0 קיים איזה y' כך ש

$$|y'-y|<\epsilon$$

וקיימים x_1,x_2 כך ש

$$y(x_1)=y(x_2)=y'$$

(כי x_0 היא נקודת מינימום או מקסימום). לכן לכל סביבת ϵ של (x_0,y_0) קיימים x_1,x_2,y' כך שנמצאים בסביבה ו

$$F(x_1,y')=F(x_2,y')=0$$

ולכן F לא מגדירה את x כפונקציה של y בסביבת הנקודה (x_0,y_0).

7. נתונה מערכת משוואות

$$f(x,u,v)=0$$

$$g(y,u,v)=0$$

$$h(z,u,v)=0$$

עבור $a=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)\in\mathbb{R}^5$ נסמן

$$A_a=\begin{pmatrix} h_u(a_3,a_4,a_5) & h_v(a_3,a_4,a_5)\\ g_u(a_2,a_4,a_5) & g_v(a_2,a_4,a_5)\end{pmatrix},\quad B_a=\begin{pmatrix} f_u(a_1,a_4,a_5) & f_v(a_1,a_4,a_5)\\ g_u(a_2,a_4,a_5) & g_v(a_2,a_4,a_5)\end{pmatrix}$$

הוכיחו כי אם

$$|B_a|h_z(a_3,a_4,a_5)\neq 0$$

אז המערכת מגדירה את z כפונקציה של x,y בסביבת a ומתקיים

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a_1,a_2)=\frac{|A_a|f_x(a_1,a_4,a_5)}{|B_a|h_z(a_3,a_4,a_5)}$$

פתרון. נבדוק את תנאי משפט הפונקציה הסתומה לכך שמערכת המשוואות מגדירה את u,v,z כפונקציות של x,y. הדטרמיננטה שצריך לבדוק היא:

$$\left|\begin{pmatrix} f_z & f_u & f_v \\ g_z & g_u & g_v \\ h_z & h_u & h_v \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 & f_u & f_v \\ 0 & g_u & g_v \\ h_z & h_u & h_v \end{pmatrix}\right| = h_z \left|\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}\right|$$

לפי הנתון באמת מתקיים

$$h_z \left|\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}\right| \neq 0$$

ואז המערכת מגדירה את z,u,v כפונקציות של x,y ובפרט את z כפונקציה של x,y.

לפי משפט הפונקציה הסתומה

$$\begin{pmatrix} 0 & f_u & f_v \\ 0 & g_u & g_v \\ h_z & h_u & h_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_x \\ u_x \\ v_x \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_x \\ g_x \\ h_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לפי כלל קרמר

$$z_x = \frac{\left|\begin{pmatrix} -f_x & f_u & f_v \\ 0 & g_u & g_v \\ 0 & h_u & h_v \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 & f_u & f_v \\ 0 & g_u & g_v \\ h_z & h_u & h_v \end{pmatrix}\right|} = \frac{-f_x \left|\begin{pmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{pmatrix}\right|}{h_z \left|\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}\right|} = \frac{f_x \left|\begin{pmatrix} h_u & h_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}\right|}{h_z \left|\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}\right|}$$

וזה בדיוק הדרוש

8. נגדיר את הפונקציה

$$f(x,y) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(א) הוכיחו כי f דיפרנציאבילית בקטע הפתוח $(-1,1)$ וכי $f'(0) \neq 0$.

פתרון. בכל נקודה $x \in (-1,1)$ שבה $x \neq 0$ ברור ש f דיפרנציאבילית. בנקודה $x = 0$ יתקיים:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t + 2t^2 \sin \frac{1}{t}}{t} = \lim_{t\to 0} 1 + 2t \sin \frac{1}{t} = 1 \neq 0$$

(ב) הוכיחו כי f אינה חד חד ערכית בכל קטע פתוח המכיל את 0. הצעה לפתרון: הוכיחו ראשית כי עבור כל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$f(\frac{2}{(4k+1)\pi}) > f(\frac{2}{(4k+3)\pi}) < f(\frac{2}{(4k+4)\pi})$$

פתרון. עבור כל $k \in \mathbb{N}$

$$f(\frac{2}{(4k+1)\pi}) = \frac{2}{(4k+1)\pi} + 2(\frac{2}{(4k+1)\pi})^2 \sin(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = \frac{2}{(4k+1)\pi} + 2(\frac{2}{(4k+1)\pi})^2$$

$$f(\frac{2}{(4k+3)\pi}) = \frac{2}{(4k+3)\pi} + 2(\frac{2}{(4k+3)\pi})^2 \sin(2k\pi + \frac{3\pi}{2}) = \frac{2}{(4k+3)\pi} - 2(\frac{2}{(4k+3)\pi})^2$$

היות ו

$$\frac{2}{(4k+3)\pi} < \frac{2}{(4k+1)\pi}, \quad -2(\frac{2}{(4k+3)\pi})^2 < 2(\frac{2}{(4k+1)\pi})^2$$

אז ברור ש

$$f(\frac{2}{(4k+3)\pi}) < f(\frac{2}{(4k+1)\pi})$$

כמו כן

$$f(\frac{2}{(4k+4)\pi}) = f(\frac{2}{(4k+4)\pi}) = \frac{2}{(4k+4)\pi} + 2(\frac{2}{(4k+4)\pi})^2 \sin(2k\pi + \frac{4\pi}{2}) = \frac{2}{(4k+4)\pi}$$

כעת נותר להוכיח

$$\frac{2}{(4k+4)\pi} > \frac{2}{(4k+3)\pi} - 2(\frac{2}{(4k+3)\pi})^2$$

עם קצת חישובים:

$$\frac{1}{(4k+4)} > \frac{1}{(4k+3)} - \frac{4}{(4k+3)^2\pi}$$

$$(4k+3)^2\pi > (4k+4)(4k+3)\pi - 4(4k+4)$$

$$\pi(16k^2 + 24k + 9) > \pi(16k^2 + 28k + 12) - 16k - 16$$

$$16k + 16 > \pi(4k+3)$$

אכן מתקיים. כלומר, על כל קטע פתוח סביב 0, f היא לא מונוטונית , אבל פונקציה רציפה וחד חד ערכית חייבת להיות מונוטונית ולכן f לא חד חד ערכית ולכן לא הפיכה (בכל סביבה של 0).

(ג) איזה תנאי מתנאי משפט הפונקציה ההפוכה לא מתקיים כאן? (הרי מסקנת המשפט לא מתקיימת). בדקו בצורה מפורשת שהוא לא מתקיים.

פתרון. f לא גזירה ברציפות. הנגזרת של f היא

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 1 + 4x\sin\frac{1}{x} - 2\cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$$

וכמובן שהגבול

$$\lim_{x\to 0}(1 + 4x\sin\frac{1}{x} - 2\cos\frac{1}{x})$$

לא קיים. לכן הנגזרת לא רציפה ב 0.