תרגול 10

28 בדצמבר 2015

תזכורת (הדיפרנציאל):

$$d_a^n f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\sum_{\alpha_1+\ldots\alpha_n=n}\frac{n!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\frac{\partial^n f\left(a\right)}{\partial^{\alpha_1}x_1\cdots\partial^{\alpha_n}x_n}dx_1^{\alpha_1}\cdots dx_n^{\alpha_n}$$

הגדרה 0.1 (פולינים טיילור): תהי $f\left(x_1,\ldots,x_m\right)$ פונקציה אזי פולינום טיילור סביב נקודה a שלה הוא:

$$P_n\left(x_1,\ldots,x_m\right)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}d_a^i f=\sum_{i=0}^{n}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_m=i}\frac{1}{\alpha_1!\cdots\alpha_m!}\frac{\partial^i f\left(a\right)}{\partial^{\alpha_1}x_1\cdots\partial^{\alpha_m}x_m}\left(x-x_1\right)^{\alpha_1}\cdots\left(x-x_m\right)^{\alpha_m}$$

תרגיל: חשבו פולינום טיילור מסדר 2 לפונקציה $f\left(x,y\right)=x^y$ סביב נקודה $(1,1)$.

פתרון: קודם כל נרשום נוסחה לפולינום טיילור מסדר 2 :

$$P_2^n\left(x,y\right)=f\left(1,1\right)+\frac{\partial f\left(1,1\right)}{\partial x}\left(x-1\right)+\frac{\partial f\left(1,1\right)}{\partial y}\left(y-1\right)+\frac{1}{2}\Bigg(\frac{\partial^2 f\left(1,1\right)}{\partial x^2}\left(x-1\right)^2+2\frac{\partial^2 f\left(1,1\right)}{\partial x\partial y}\left(x-1\right)\left(y-1\right.$$

נשאר לנו רק לחשב את הנגזרות החלקיות עד סדר שני בנקודה $(1,1)$ ולהציב אותן בנוסחה:

$f_{xx}\left(1,1\right)=0$ $f_y\left(1,1\right)=0$ $f_x\left(1,1\right)=1$

$f_{xy}\left(1,1\right)=1$, $f_{yy}\left(1,1\right)=0$

נציב את מה שמצאנו בנוסחה ונקבל שפולינום טיילור של f מסדר 2 בנקודה $(1,1)$ הוא :

$$P_2\left(1,1\right)=1+\left(x-1\right)+\left(x-1\right)\left(y-1\right)$$

תרגיל: חשבו פולינום טיילור מסדר 3 עבור הפונקציה: $f\left(x,y\right)=e^x sin\left(y\right)$ סביב נקודה $(0,0)$

פתרון: ידוע ש: $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $sin\left(y\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ולכן $f\left(x,y\right)=\sum\frac{x^n}{n!}\sum\frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}$

עבור סדר 3 נחפש מתי סכום החזקות של x ו y הוא 3 :

$$e^x sin\left(y\right) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\left(y - \frac{y^3}{6}\right) = y - \frac{y^3}{6} + xy + \frac{x^2 y}{2} = P_3\left(x, y\right)$$

שימו לב שלא לקחנו מחשבון את הביטוי $-\frac{xy^3}{6}$ משום שהוא נותן לנו איבר מסדר 4 .

תרגיל: מצא פולינום טיילור מסדר 8 לפונקציה $f\left(x, y\right) = \frac{1}{1-x^2 y}$ ומצא בעזרתו את $\frac{\partial^6 f(0,0)}{\partial^4 x \partial^2 y}$ סביב $\left(0, 0\right)$

פתרון: ידוע ש $\frac{1}{1-x^2 y} = \sum_{n=0}^{8}\left(x^2 y\right)^n$ ולכן פולינום טיילור מסדר 8 הוא

$$P_8\left(x, y\right) = 1 + x^2 y + x^4 y^2$$

לא לקחנו יותר איברים כי הבא בתור הוא $x^8 y^4$ וזה כבר מסדר 12 ואנחנו רוצים עד סדר 8

מיחידות טור טיילור נובע ש: $1 = \frac{1}{4!2!}\frac{\partial^6 f(0,0)}{\partial x^4 \partial y^2}$ ולכן $48 = \frac{\partial^6 f(0,0)}{\partial x^4 \partial y^2}$

נקודות קיצון של פונקציות בכמה משתנים

הגדרה 0.2 (קיצון מקומי) ל־f יש מקסימום (מינימום) מקומי ב־p_0 אם יש סביבה של p_0 שבה לכל נקודה M בסביבה הנ"ל

$$f\left(M\right) \leq f\left(p_0\right)\left(max\right)$$

$$f\left(M\right) \geq f\left(p_0\right)\left(min\right)$$

תנאי הכרחי לקיצון: אם ל־f כל הנגזרות החלקיות מסדר 1 ו p_0 נק' קיצון מקומית אז $\nabla f\left(p_0\right) = 0$ (כל הנגזרות החלקיות הראשונות שוות לאפס)

נקודות שחשודות לקיצון: אלה נקודות סטציונאריות שבהן כל הנגזרות החלקיות קיימות ושוות לאפס או שבהן יש נגזרת חלקית לפחות אחת שאינה קיימת.

משפט 0.3 (תנאי מספיק לנקודת קיצון של פונקציה בשני משתנים)

תהי $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ בסביבת הנק' הסטציונארית $P\left(x_0, y_0\right)$, נסמן $A = f_{xx}\left(x_0, y_0\right)$, $B = f_{xy}\left(x_0, y_0\right)$, $C = f_{yy}\left(x_0, y_0\right)$ ונגדיר:

$$\Delta = det\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = AC - B^2$$

בנקודה $\left(x_0, y_0\right)$,

1) אם $\Delta > 0$ אז יש ל־f נקודת קיצון ב־$\left(x_0, y_0\right)$ ואז אם $A > 0$ אז הנקודה היא מינימום ואם $A < 0$ אז היא מקסימום (לא יכול להיות ש־$\triangle > 0$ ו־$A = 0$ כי אז $\triangle = -B^2 < 0$)

2) אם $\triangle = 0$ אי אפשר לדעת לפי המשפט (חייבים להפעיל הגדרה)

3) אם $\triangle < 0$ אין בנקודה הנ"ל קיצון אלא אוכף (פיתול מרחבי)

דוגמה: נחקור נקודות קיצון של הפונקציה $f\left(x,y\right)=x^{4}+y^{4}-x^{2}+2xy-y^{2}$

פתרון: נאפס את הגרדיאנט ונמצא נקודות שחשודות לקיצון:

$f_{x}\left(x,y\right)=4x^{3}-2x+2y=0$

$f_{y}\left(x,y\right)=4y^{3}+2x-2y=0$

נחבר את שתי המשוואות ונקבל $x^{3}+y^{3}=0$ ואז $x=-y$, נציב את זה משוואת ראשונה, למשל, ונקבל $x^{3}-x=x\left(x^{2}-1\right)=0$ ואז אם $x=0$ אז $y=0$ ואם $x=\pm1$ אז $y=\mp1$

קיבלנו שנקודות שחשודות לקיצון הן: $(0,0)$ $(1,-1)$ $(-1,1)$

נמצא את הנזגרות השניות של f ונקבל: $f_{xx}\left(x,y\right)=12x^{2}-2$, $f_{xy}\left(x,y\right)=2$, $f_{yy}\left(x,y\right)=12y^{2}-2$ ולכן בנקודות $(1,-1)$ $(-1,1)$ נקבל ש:

$A=10$ $B=2$ $C=10$ ולכן $\triangle=100-4=96>0$ וגם $A>0$ ולכן הנקודה היא המינימום המקומי.

לגבי נקודה $(0,0)$ נקבל ש־$\triangle=0$ ולכן משפט לא נותן מידע, נמשיך לחקור.

הטענה היא ש־$(0,0)$ היא נקודת אוכף. ברור ש־$f\left(0,0\right)=0$ אם היא היתה מינימום אז לפי ההגדרה היתה קיימת סביבה שבה ערך של f >0 ואם היתה מקסימום אזי היתה קיימת סביבה של $(0,0)$ שבה $f<0$. אנחנו נראה שבסביבה מספיק קטנה יש נקודות שבהן f היא חיובית ויש נקודות שבהן f היא שלילית.

נבחר מסלול $x=y\to0$ ואז נקבל $f\left(x,x\right)=4x^{4}>0$ ולכל $x\neq0$ ואם נבחר מסלול $y=0$ $x\to0$ אזי נקבל $f\left(x,0\right)=x^{2}\left(x^{2}-1\right)$ וברור שבסביבה מספיק קטנה יש נקודות שבהן f שלילית ונקודות שבהן f חיובית ולכן f היא נקודת אוכף.

מציאת נקודות קיצון עבור פונקציה ב n משתמים

קודם כל נשווה את הגרדיאנט לאפס, נפתור את המשוואות שמקבלות כדי למצוא נקודות חשודות לקיצון.

לאחר מכן נבדוק את מטריצת בבסיאן (מטריציה של נגזרות שניות) ואז קיימים מספר מקרים:

1) אם מטריצה חיובית לחלוטין קרי כל הערכים העצמיים שלה חיוביים (או באופן שקול כל המינורים הראשיים הם חיוביים) זו נק' מינימום

2) אם מטריצה שלילית לחלוטין, קרי כל הערכים העצמיים שלה שליליים (או באופן שקול המינירים הראשיים מגודל אי זוגי שליליים, ומגודל זוגי חיוביים) זו נקודת מקסימים.

3) אם לא ולא אזי זו נקודת אוכף

דוגמה: נחקור את נק' קיצון של הפונק' הבאה:

$$f\left(x,y,z\right)=x^{2}+y^{2}+z^{2}-2x-4y+6z$$

תשובה: נשווה את הקרדיאנט לאפס ונפתור את המשוואות שמתקבלות:

$f_{x}=2x-2=0\Rightarrow x=1$

$f_{y}=2y-4=0\Rightarrow y=2$

$f_{z}=2z+6=0\Rightarrow z=-3$

ולכן נקודה שחשודה לקיצון היא $(1,2,-3)$, נמצא כעת מטריצת ההסיאן:

$f_{xx=2}$, $f_{yy}=2$, $f_{zz}=2$, $f_{xy}=f_{xz}=f_{yz}=0$ ולכן מטריצה שמתקבלת היא :

$$H=\left(\begin{array}{ccc}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{array}\right)$$

קיבלנו מטריצה אחכסונית , ברור שכל הערכים העצמיים שלה הם על אלכסון הראשי וכולם שווים ל 2 >0 ולכן זו נקודת מינימום.

תרגיל: מצא את נקודות הקיצון של הפונק' הבאה וסווגו אותן:

$$u\left(x,y,z\right)=3x^{3}+y^{2}+z^{2}+6xy-2z+1$$

פתרון: כמו תמיד נשווה את הגרדיאנט לאפס ונקבל:

$u_{x}=9x^{2}+6y=0$
$u_{y}=2y+6x=0$
$u_{z}=2z-2=0$

נפתור את מערכת משוואות הזו נקבל שנקודות שחשודות לקיצון הן: $(0,0,1)$ $(2,-6,1)$

נמצא את מטריצת ההסיאן ונקבל: $u_{xx}=18x$, $u_{yy}=2$, $u_{zz}=2$, $u_{xy}=6$, $u_{xz}=u_{yz}=0$

$$H=\left(\begin{array}{ccc}18x & 6 & 0\\ 6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{array}\right)$$

בנקודה $(0,0,1)$ נקבל :

$$H=\left(\begin{array}{ccc}0 & 6 & 0\\ 6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{array}\right)$$

זו מטריצת בלוקים וברור שאחד הערכים העצמיים שלה שווה ל־2 והוא חיובי. כדי לקבוע את הסימן של שאר הערכים העצמיים נתבונן במינור השני:

$$det\left(\begin{array}{cc}0 & 6\\ 6 & 2\end{array}\right)$$

קיבלנו שמינור שני שלילי, אבל הוא דטרמיננטה של מטריצה סימטרית מגודל 2×2 ולכן היא לכסינה ולכן היא דומה למטריצה אלכסונית שעל אלכסונה נמצאים ערכים עצמיים שלה. ידוע שלמטירצות דומות יש את אותה דטרמיננטה ואותם ערכים עצמיים ומזה נקבל ש־$\lambda_{1}\cdot\lambda_{2}<0$ ולכן בהכרח אחד הע"ע חיובי ואחד שלילי. סה"כ קיבלנו שלמטריצה H בנקודה $(0,0,1)$ יש שני ערכים עצמיים חיוביים ואחד שלילי ולכן זו נקודת אוכף .

בנקודה $(2,-6,1)$ נקבל:

$$H=\left(\begin{array}{ccc}36 & 6 & 0\\ 6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{array}\right)$$

באותה דרך אפשר להראות שכל הע"ע של H בנקודה $(2,-6,1)$ הם חיוביים ולכן זו נקודת מינימום.

הערה: אפשר היה ישירות למצוא ערכים עצמיים בעזרת פולינום אופייני.
תרגיל: מצאו נקודות קריטיות עבור פונקציה הבאה וסווגו אותן:

$$f\left(x,y,z\right)=x^4+y^4+z^4-2a^2\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

כאשר $a>0$
פתרון: נשווה את הגרדיאנט לאפס ונמצא נקודות שחשודות לקיצון:
$f_x=4x^3-4a^2x=0\Rightarrow x=0,\pm a$
$f_y=4y^3-4a^2y=0\Rightarrow y=0,\pm a$
$f_z=4z^3-4a^2z=0\Rightarrow z=0,\pm a$
סה"כ יש לנו 27 נקודות שחשודות לקיצון.
נמצא נגזרות שניות ונקבל שמטריצת ההסיאן היא:

$$H=\begin{pmatrix} 12x^2-4a^2 & 0 & 0\\ 0 & 12x^2-4a^2 & 0\\ 0 & 0 & 12x^2-4a^2 \end{pmatrix}$$

בנקודה $(0,0,0)$ נקבל:

$$H=\begin{pmatrix} -4a^2 & 0 & 0\\ 0 & -4a^2 & 0\\ 0 & 0 & -4a^2 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה אלכסונית וכל הע"ע שלה נמצאים על לאכסון, קל לראות שכולם שליליים ולכן זו נקודת מקסימום
בנקודה $(\pm a,0,0)$ נקבל :

$$H=\begin{pmatrix} 8a^2 & 0 & 0\\ 0 & -4a^2 & 0\\ 0 & 0 & -4a^2 \end{pmatrix}$$

למטריצה זו יש ע"ע אחד חיובי ושני ע"ע שליליים ולכן זו נקודת אוכף, קל לראות שזה נכון גם עבור נקודות $(0,\pm a,0)$ וגם $(0,0,\pm a)$
בנקודה $(\pm a,\pm a,0)$ נקבל:

$$H=\begin{pmatrix} 8a^2 & 0 & 0\\ 0 & 8a^2 & 0\\ 0 & 0 & -4a^2 \end{pmatrix}$$

למטריצה זו יש שני ע"ע חיוביים ואחד שלילי ולכן זו נקודת אוכף. קל לראות שזה נכון גם עבור נקודות $(\pm a,0,\pm a)$, $(0,\pm a,\pm a)$
בנקודה $(\pm a,\pm a,\pm a)$ נקבל

$$H = \left(\begin{array}{ccc} 8a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 8a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8a^2 \end{array} \right)$$

כל הע"ע כאן חיוביים ולכן זו נקודת מינימום.