

בדידה 1 תרגיל 1

לוגיקה

(התרגיל מבוסס על החומר של שני התרגולים הראשונים)

1. קבע נכון או לא נכון ונמק (לא נכון דורש השמת ערכי אמת עבורם זה לא נכון):

א. אם p אמת, q שקר ו- r שקר, אז $p \vee (q \wedge r)$ אמת.

ב. הפסוק $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \leftrightarrow \neg p)$ הוא טאוטולוגיה.

ג. הפסוקים $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ו- $p \wedge (q \vee r)$ שקולים.

פיתרון:

א. נכון: לכל אטום x מתקיים $T \vee x = T$ (כלומר, אמת או כל דבר נותן אמת), ולכן כיון ש- $p = T$ נקבל שהפסוק כולו אמת.

ב. נכון: ראינו ש- $\neg p \rightarrow \neg q \equiv p \rightarrow q$, ובאותו אופן $\neg q \rightarrow \neg p \equiv q \rightarrow p$. ולכן נקבל:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) = (\neg q \rightarrow \neg p) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q) \equiv (\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow \neg p) \equiv (\neg q \leftrightarrow \neg p)$$

כאשר השייוויון * נובע מהגדרת "אם ורק אם", והשייוויון ** נובע מחילופיות הקשר "וגם".

ג. לא נכון: אם $p = T, q = r = F$, ואילו הביטוי השמאלי נותן T .

2. הוכח את השקילויות הבאות (השתמש בטבלת אמת):

א. $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

ב. $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A) \equiv A \vee \neg B$

פיתרון:

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg A \vee B$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

א.

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	צד שמאל	$A \vee \neg B$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

ב.

3. הצרן את המשפטים הבאים לפסוקים בתחשיב פרדיקטים:

א. לכל מספר ממשי שונה מאפס קיים הופכי.

ב. לכל מספר טבעי n , אם קיים מספר טבעי שונה ממנו ומ-1 המחלק אותו אז הוא (n) איננו ראשוני.

ג. לכל שני מספרים טבעיים n, m קיים מספר טבעי מקסימלי המחלק את שניהם.

פיתרון:

א. $\forall x \in \mathbb{R} : (x \neq 0) \rightarrow (\exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1)$

ב. נגדיר את הפרדיקט $P(n)$ להיות $P(n) = n \text{ is prime}$

$$\forall n \in \mathbb{N} : (\exists m \in \mathbb{N} ((m \neq n) \wedge (m \neq 1) \wedge (m|n))) \rightarrow (\neg P(n))$$

ג.כל האותיות להלן מהטבעיים:

$$\forall n \forall m \exists d ((d|n) \wedge (d|m) \wedge (\forall c : ((c|n) \wedge (c|m) \rightarrow c \leq d))$$

4. מצא פרדיקט Q עבורו הפסוק

$$\forall x \exists y Q(x, y) \wedge \forall y \exists x Q(x, y) \rightarrow \forall x \exists y (Q(x, y) \wedge Q(y, x))$$

לא בהכרח נכון.

פיתרון:

למשל הפרדיקט $Q(x, y) = x < y$ על הממשיים: צד שמאל תמיד נכון, צד ימין לא נכון עבור x, y כלשהם.

5. א. הצרן את הגדרת הגבול (נסמנו לצורך העניין ב- l) של סדרת מספרים a_n : לכל ϵ גדול מאפס קיים n_0 כך שלכל n הגדול

מ- n_0 המספר $|a_n - l|$ קטן מ- ϵ .

ב. הצרן שלוש שלילות של פסוק זה.

פיתרון:

א.

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 (|a_n - l| < \epsilon)$$

ב.

$$\neg (\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 (|a_n - l| < \epsilon))$$

$\equiv$

$$\exists \epsilon > 0 \neg (\exists n_0 \forall n > n_0 (|a_n - l| < \epsilon))$$

≡

$$\exists \epsilon > 0 \forall n_0 \exists n > n_0 (|a_n - l| \geq \epsilon)$$

בהצלחה!