פולינומים אורתוגונליים

מרצה: פרופ' זינובי גרינשפון

סיכום: אלון צ'רני

הקורס ניתן בסמסטר אביב 2013, בר אילן

פולינומים אורתוגונאליים

תוכן עניינים

הרצאה 1 תאריך 3.3.13

- מרחב מכפלה פנימית (הגדרה, תכונות, דוגמאות)
- נורמה (הגדרה, דוגמאות)
- אי-שוויון קושי-שוורץ-בוניאקובסקי (הוכחה, נוסחת השגיאה)
- תרגילים: מכפלה פנימית

הרצאה 2 תאריך 10.3.13

- אי-שוויון המשולש (הוכחה)
- ניצבות של ווקטורים, והגדרת מערכת אורתוגונאלית.
- מקדמי פורייה (הגדרה, דוגמא)
- משפט דיריכלה
- תרגילים: מכפלה פנימית

הרצאה 3 תאריך 17.3.13

- אי-שוויון ינסן (Jensen)
- אי-שוויון יונג (Yung)
- אי-שוויון הולדר (Hölder)
- אי-שוויון מינקובסקי (Minkovsky)
- תרגילים: אי-שוויונים

הרצאה 4 תאריך 7.4.13

- תרגילים: אי-שוויונים (המשך)

הרצאה 5 תאריך 14.4.13

- מטריקה (הגדרה, תכונות, דוגמאות: המטריקה של טיחונוב)
- גבול של סדרה תחת מטריקה
- סדרת קושי ומרחב שלם
- הגדרת נורמה עבור מרחבים שונים (הגדרה ודוגמאות)

הרצאה 6 תאריך 21.4.13

ההרצאה בוטלה

הרצאה 7 תאריך 28.4.13

- תרגילים: מטריקה
- מרחב הילברט (הגדרה, תכונות)
- משפט ניומרק
- משפט פישר-ריס
- תרגילים: מרחב הילברט

הרצאה 8 תאריך 5.5.13

- תרגילים: מרחב הילברט (המשך)
- נוסחת הפולריזציה
- דטרמיננטה של גרם-שמיט
- פונקצית משקל / מומנט
- הצגה של פולינום מנורמל מסדר n בעזרת הדטרמיננטה של גרם-שמיט
- מערכות פולינומים אורתוגונאליים ידועות
  - לג'נדר (Legander)
  - צ'בישב (Tchebyshev)
  - יעקובי (Jacoby)
  - הרמיט (Hermit)
  - לגר (Laguerre)
  - ברנשטיין - סג'ייה (Berinstein-Szego)

הרצאה 9 תאריך 12.5.13

- תהליך גרם-שמיט
- הקירוב הטוב ביותר
- אי-שוויון בסל / שוויון פרסבל
- משפטי השלמות של מערכות אורתונורמאליות

הרצאה 10 תאריך 19.5.13

- ❖ שלמות מערכת פולינומים אורתונורמאלית
- ❖ שני עקרונות עבור פולינומים אורתוגונאליים
- ❖ יחידות מערכת אורתוגונאלית
- ❖ מערכת אורתוגונאלית עם פונקצית משקל סימטרית
- ❖ משוואות תלת נסיגה

הרצאה 11 תאריך 26.5.13

- ❖ משוואות תלת נסיגה (המשך)
- ❖ מקדמי פורייה של כל פולינום חסומים.
- ❖ זהות דרבו-כריסטופל, והגרעין של כריסטופל
- ❖ תכונות אפסים של $P_n(x)$

הרצאה 12 תאריך 2.6.13

- ❖ תכונות אפסים של $P_n(x)$ (המשך)
- ❖ משפט פיקונה

הרצאה 13 תאריך 9.6.13

- ❖ תרגילים: מערכות אורתוגונאליות

הרצאה 14 תאריך 16.6.13

- ❖ מרחב ליפשיץ Lip_M^α
- ❖ התכנסות נקודתית ובמידה שווה של טור פורייה של פולינומים אורתוגונאליים
- ❖ הצגת רודריגו

הרצאת חזרה תאריך 17.7.13

- ❖ הקירוב הטוב ביותר
- ❖ משפט פישר-ריס
- ❖ תרגילים: הקירוב הטוב ביותר
- ❖ תהליך גרם-שמיט
- ❖ משפט פיקונה

פולינומים אורתוגונאליים

סיכום קורס

❖ **מכפלה פנימית** מקיימת את התנאים הבאים:

1. $<u,u>\geq 0 \quad <u,u>=0 \quad iff \quad u\equiv 0$

2. $<u,v>=\overline{<v,u>}$

3. $<\alpha u,v>=\alpha <u,v> \qquad \Rightarrow \qquad <u,\alpha v>=\overline{\alpha}<u,v>$

4. $<u+v,w>=<u,w>+<v,w>$

❖ **נורמה** מקיימת את התנאים הבאים:

1. $\|v\|\geq 0 \qquad \|v\|=0 \quad iff \quad v=0$

2. $\|\alpha\cdot v\|=|\alpha|\cdot\|v\|$

3. $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

תנאי 3 נקרא אי-שוויון המשולש.

❖ אם מעל מרחב ליניארי מוגדרת מכפלה פנימית, אזי המכפלה הפנימית משרה נורמה.

❖ **אי-שוויון קושי-שוורץ-בוניאקובסקי**, ונוסחת השגיאה.

$$|<f,g>|^2\leq\|f\|^2\cdot\|g\|^2 \qquad \varepsilon=\|f\|^2\cdot\|g\|^2-|<f,g>|^2$$

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\left\{\int_a^b\int_a^b|f(x)g(y)-g(x)f(y)|^2\,dxdy\right\}$$

❖ ווקטורים u,v ניצבים, אם מתקיים $<u,v>=0$

❖ סדרה $\{u_n\}$ מהווה **מערכת אורתוגונאלית**, אם היא המקיימת:

$$<u_n,u_m>=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \|u_n\|^2 & n=m\end{cases}$$

❖ הביטוי $f=\sum_k a_k u_k$ מהווה **הצגה של f במרחב**, בעזרת הסדרה $\{u_n\}$.

❖ **אי-שוויון ינסן (Jensen)**

עבור פונקציה $f(x)$ קמורה, מתקיים: $f\left(\sum_{k=1}^{N}\alpha_k \cdot x_k\right) \le \sum_{k=1}^{N}\alpha_k \cdot f(x_k)$

❖ **אי-שוויון יונג (Yung)**

עבור כל $a,b>0$, וכן עבור $p>1$ מתקיים: $a \cdot b \le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$

כאשר $q=\frac{p}{1-p}$ או לחילופין בהצגה אחרת $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

מקרה פרטי של אי השוויון $\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy \ge a \cdot b$ עבור $f(x)=x^{p-1}$

כאשר $f(x)$ רציפה מעל $[x,\infty)$

❖ **אי-שוויון הולדר (Hölder)**

אי-שוויון הולדר מהווה הרחבה של אי-שוויון קושי-שוורץ הקיים עבור $p=2$

נתון $x(t),y(t)\in L^P[a,b]$ אם מתקיים:

$\|x\|_P=\left[\int_a^b |x(t)|^P dt\right]^{\frac{1}{P}}<\infty$ וגם $\|y\|_q=\left[\int_a^b |y(t)|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}<\infty$ כאשר $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

אזי $\int_a^b |x(t)y(t)|dt \le \|x\|_P\|y\|_q$

❖ **אי-שוויון מינקובסקי (Minkovsky)**

אי-שוויון מינקובסקי מהווה הרחבה של אי-שוויון המשולש המוכר עבור $p=2$

נתון $x(t),y(t)\in L^P[a,b]$ עבור $P\ge 1$ מתקיים: $\|x+y\|_P \le \|x\|_P+\|y\|_P$

דהיינו: $\left[\int_a^b |x(t)+y(t)|^P dt\right]^{\frac{1}{P}} \le \left[\int_a^b |x(t)|^P dt\right]^{\frac{1}{P}} \cdot \left[\int_a^b |y(t)|^P dt\right]^{\frac{1}{P}}$

❖ **מטריקה** מקיימת את התנאים הבאים:

1. $\rho(x,y)\geq 0 \qquad \rho(x,y)=0 \quad iff \quad x\equiv y$

2. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$

3. $\rho(x,y)\leq \rho(x,z)+\rho(z,y)$

❖ אם מעל מרחב ליניארי מוגדרת נורמה, אזי הנורמה משרה מטריקה.

❖ עבור מטריקה קיימת הדרישה $\|\alpha\cdot v\|=|\alpha|\cdot\|v\|$ אין דרישה כזו ממטריקה.

❖ **המטריקה של טיחונוב**.

נתונות 2 סדרות במרחב טיחונוב, המקיימות: $x=\{a_i\}_{i=1}^{\infty}\ ,\ y=\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$

אזי המטריקה של טיחונוב מוגדרת להיות $\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}\right)\left[\frac{|a_k-b_k|}{1+a_k-b_k}\right]$

❖ הגדרת נורמה מעל מרחבים שונים:

- אם $x(t)\in V=C[a,b]$, כאשר V מרחב הפונקציות הרציפות, אזי $\|x(t)\|=\underbrace{\max}_{a\leq t\leq b}\{x(t)\}$
- אם $x(t)\in V=C(a,b)$, כאשר V מרחב הפונקציות הרציפות, אזי $\|x(t)\|=\underbrace{Sup}_{a\leq t\leq b}\{x(t)\}$
- אם $x(t)\in V=L^P[a,b]$, אזי $\|x(t)\|=\left\{\int_a^b[x(t)]^P\,dt\right\}^{\frac{1}{P}}$
- אם $x[n]=\{a_i\}_{i=1}^{\infty}\in V=l^P$, אזי $\|x[n]\|=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^P\right\}^{\frac{1}{P}}$
- אם $\varphi(x_1,x_2)\in V=C^2$, כאשר $\{x_1,x_2\}\in C$, אזי $\|\varphi(x_1,x_2)\|=\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2}$

❖ המרחק בין שני איברים מוגדר לפי מטריקה, ובמרחב נורמי מתקיים:

$\rho(x_n,x_m)=\|x_n-x_m\|$ לפי הגדרת הנורמה.

❖ **גבול של סדרה** x_n

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ ;\ n>N(\varepsilon)\ \Rightarrow\ \rho(x_n,a)<\varepsilon$$

אם קיים גבול, אזי הגבול יחיד וגם איברי הסדרה חסומים. ($\rho(x_n,0)\leq M$)

❖ סדרה $\{x_n\}$ תקרא **סדרת קושי** אם היא מקיימת את התנאי הבא על איברי הסדרה:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon) \ ; \ n,m > N(\varepsilon) \ \ \Rightarrow \ \ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

❖ מרחב ייקרא **מרחב שלם** אם כל סדרת קושי מתכנסת לגבול השייך למרחב.

המרחב Q של הרציונאליים לא שלם, כי $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \in Q$ שואף ל- e, אך $e \notin Q$.

❖ מרחב מכפלה פנימית ייקרא **מרחב הילברט** אם המרחב מקיים את התנאים הבאים:

- הנורמה מושרת ע"י המכפלה הפנימית
- ניתן להגדיר את המכפלה הפנימית בעזרת הנורמה. (מתקיים תנאי המקבילית)
- המרחב שלם

❖ **תנאי המקבילית**: אם עבור כל שני ווקטורים השייכים למרחב $\forall x, y \in V$ מתקיים

$$\|x+y\|^2 \|x-y\|^2 = 2 \cdot \left(\|x\|^2 \|y\|^2\right)$$

❖ **משפט ניומרק**: אם תנאי המקבילית מתקיים, אזי ניתן להגדיר את המכפלה פנימית בעזרת נורמה.

❖ קיום מרחב הילברט:

- עבור מרחב $V = L^P$ תנאי המקבילית מתקיים רק עבור $P = 2$, דהיינו רק L^2 הוא מרחב הילברט.

  נובע מאילוץ תנאי המקבילית עבור:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \qquad y(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

- עבור מרחב $V = l^P$ תנאי המקבילית מתקיים רק עבור $P = 2$, דהיינו רק l^2 הוא מרחב הילברט.

  נובע מאילוץ תנאי המקבילית עבור:

$$x = \{1,1,0,0,0,....\} \qquad y = \{1,-1,0,0,0,....\}$$

- במרחב $V = C[a,b]$ אם הנורמה $\|x(t)\| = \underbrace{\max}_{a \le t \le b}\{x(t)\}$ לא מתקיים תנאי המקבילית,

ולא איננו מרחב הילברט.

❖ **תכונות מרחבי הילברט:**

- לא כל מרחב הילברט הוא מרחב ספרבילי.
- מרחבי הילברט בעלי אותו מימד הם:
  - איזומורפיים - לכל איבר במרחב אחד, קיים איבר במרחב השני
  - איזומטריים – הנורמה של זוג איברים שווה. (פרסבל)

❖ **משפט פישר רוס**: כל סדרה ב- $\{c_n\}\in l^1$ ניתן להציג כמקדמי פורייה של פונקציה $f(x)\in L^2$, ביחס למערכת אורתונורמאלית $\{u_n\}$, <u>ולהיפך</u>.

דהיינו, בהינתן $f(x)$ קיימת סדרה המקיימת $c_n =< f(x),u_n(x) >$

כך שניתן לרשום את הפונקציה $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot u_n(x)$ וגם מתקיים $\|f(x)\| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$

❖ **נוסחת הפולריזציה** ביטוי מכפלה פנימית בעזרת נורמה

$$< u,v >= \tfrac{1}{4}\cdot\left[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2\right]$$

(בשביל שיתקיימו כל תנאי מכפלה פנימית, צריך להתקיים תנאי המקבילית)

❖ נתונה מערכת $\{u_i\}$ בלתי-תלויה המרחב V.

נסמן ב- Δ_n את **הדטרמיננטה של גרם-שמיט**

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} <u_1,u_1> & <u_1,u_2> & \dots & \dots & <u_1,u_n> \\ <u_2,u_1> & <u_2,u_2> & \dots & \dots & <u_2,u_n> \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ <u_n,u_1> & <u_n,u_2> & \dots & \dots & <u_n,u_n> \end{vmatrix}$$

נסמן את $Q_n(x)$ להלן:

$$Q_n(x) = \begin{vmatrix} <u_1,u_1> & <u_1,u_2> & \dots & <u_1,u_{n-1}> & u_1(x) \\ <u_2,u_1> & <u_2,u_2> & \dots & <u_2,u_{n-1}> & u_2(x) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ <u_n,u_1> & <u_n,u_2> & \dots & <u_n,u_{n-1}> & u_n(x) \end{vmatrix}$$

אזי המערכת $\{Q_n(x)\}$ אורתוגונאלית:

$$< Q_n(x),Q_k(x) >= \begin{cases} 0 & k \neq n \\ \|Q_n(x)\|^2 = \Delta_n \cdot \Delta_{n-1} & k = n \end{cases}$$

❖ פונקציה $P(x)$ על קטע (a,b) תקרא פונקצית משקל, אם היא מקיימת:

$$1.\ P(x) > 0 \qquad \forall x$$

$$2.\ \int_a^b P(x)dx > 0$$

$$3.\ \int_{-\infty}^{\infty} P(x)dx < \infty$$

❖ הביטוי $\mu_n = \int_a^b x^n \cdot P(x)dx$ יקרא **המומנט ה- n של P(x)**.

❖ מערכות פולינומים אורתוגונאליים ידועות

שם	קטע	משקל P(x)	סימון	הערה
לג'נדר	$[-1,1]$	1	$P_n(x)$	
צ'בישב	$[-1,1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$T_n(x)$	סוג 1
		$\sqrt{1-x^2}$	$U_n(x)$	סוג 2
		$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$	$V_n(x)$	סוג 3
		$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	$W_n(x)$	סוג 4
יעקובי	$[-1,1]$	$(1-x)^{\alpha} \cdot (1+x)^{\beta}$	$J_n(\alpha,\beta)(x)$	$\alpha,\beta > (-1)$
הרמיט	$(-\infty,\infty)$	$\exp\{-x^2\}$	$H_n(x)$	
לגר	$(0,\infty)$	$e^{-x} \cdot e^{\alpha}$	$L_n^{\alpha}(x)$	$\alpha \geq 1$
ברנשטיין - סג'ייה	$[-1,1]$	$\frac{w_k(x)}{\rho_l(x)}$		$w_k(x)$ - משקל צ'בישב $\rho_l(x) > 0$

❖ מערכות הפולינומים של לג'נדר וצ'בישב הינם מקרים פרטיים של מערכת הפולינומים של יעקובי.

❖ נתבונן במערכת $\{u_i\}$ ווקטורים במרחב $CL^2_{[a,b]}$ המקיימים: $\{u_i\}=\{1,x,x^2,\ .....x^n\}$

אזי

$$\hat{P}_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\Delta_n\Delta_{n-1}}}\begin{vmatrix} <1,1> & <1,x> & \dots & <1,x^{n-1}> & 1 \\ <x,1> & <x,x> & \dots & <x,x^{n-1}> & x \\ : & : & & & : \\ : & : & & & : \\ <x^n,1> & <x^n,x> & \dots & <x^n,x^{n-1}> & x^n \end{vmatrix}$$

$$\hat{P}_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\Delta_n\Delta_{n-1}}}\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_{n-1} & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n & x \\ : & : & & & : \\ : & : & & & : \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n+1} & x^n \end{vmatrix}$$

$\hat{P}_n(x)$ מהווה **הצגה של פולינום מנורמל מסדר n**.

המערכת $\left\{\hat{P}_n(x)\right\}$ מהווה מערכת אורתונורמאלית.

❖ נתונה מערכת מכפלה פנימית $\{u_i\}$ בלתי-תלויים, תהליך בניית ווקטורים $\{w_i\}$ כך שיתקיים: $span\{w_i\}=span\{u_i\}$ וגם $\{w_i\}$ מערכת אורתונורמאלית,

נקרא **תהליך גרם-שמיט**

$$v_1=u_1 \qquad\qquad w_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$v_2=u_2-<u_2,w_1>w_1 \qquad\qquad w_2=\frac{v_2}{\|v_2\|}$$

$$v_n=u_n-\sum_{k=1}^{n-1}<u_n,w_k>w_k \qquad\qquad w_n=\frac{v_n}{\|v_n\|}$$

❖ נתונה מערכת אורתונורמאלית $\{v_n\}$ כמו-כן נתון ווקטור $f \in V$.

נציג את f כצירוף ליניארי של $\{v_n\}$, דהיינו, $\sum_{k=1}^{n} a_k v_k$,

המקדמים $\{a_k\}$ המביאים למינימום את המרחק בין הווקטור f ובין הצירוף הליניארי,

$\underbrace{\arg nim}_{a_k}\left\{\left\|f-\sum_{k=1}^{n} a_k v_k\right\|\right\}$ הם $a_k =< f, v_k >$ ונקראים **הקירוב הטוב ביותר**. (הקט"ב)

<u>הערות:</u>

- כאשר המרחב לא שלם מקבלים את אי-שוויון בסל $\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2 < \|f\|^2$
- כאשר המרחב שלם מקבלים את שוויון פרסבל $\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2 = \|f\|^2$
- המשפט לעיל נכון גם עבור מערכת אינסופית.
- עבור מערכת אינסופית, הטור $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2$ מתכנס, ולכן מתקיים $\underbrace{\lim}_{n\to\infty} a_n = 0$

❖ **משפטי השלמות של מערכות אורתונורמאליות** $\{v_n\}$

מערכת אורתונורמאלית שלמה אם"ם היא מקיימת אחד מששת התכונות השקולות הבאות (יש עוד תכונות שקולות שלא פורטו בקורס):

- סגירות: $c_n =< f, v_n >$ $\quad \|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$
- הצגה: $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n$, $\forall f$ ונסמן $f \sim \{c_n\}$ הצגה של f ע"י מערכת $\{v_n\}$
- צפיפות: $\left\|f-\sum_{n=1}^{n} c_n v_n\right\| < \varepsilon$ $\quad \forall f \; ; \; \exists N, c_n \quad \forall \varepsilon > 0$
- שלימות: לא קיים איבר שונה מאפס המאונך לכל המערכת.
- יחידות: $If \;\; f \sim \{c_n\} \;\&\; g \sim \{c_n\} \;\; then \;\; f = g$
- הרחבה של סגירות: $If \;\; f \sim \{a_n\} \;\&\; g \sim \{b_n\} \;\; then \;\; < f, g >= \sum a_n \overline{b_n}$

❖ **שלמות מערכת פולינומים אורתוגונאלית**

מערכת פולינום אורתונורמאלית $\left\{\hat{p}_n(x)\right\}$ בקטע $[a,b]$ במרחב מכפלה פנימית $V = C_{P(x)}L^2_{[a\,b]}$ (מרחב הפונקציות הרציפות עם משקל $p(x)$ ועם מכפלה פנימית ו/או נורמה ב- L^2) הינה מערכת שלמה.

❖ **מקדמים**

- γ_n הינו המקדם של פולינום אורתוגונאלי $P_n(x) = \gamma_n \cdot x^n + \ . \ . \ . \ + \gamma_0$
- μ_n הינו המקדם של פולינום אורתונורמאלי $\hat{P}_n(x) = \mu_n \cdot x^n + \ . \ . \ . \ + \mu_0$

❖ **עקרונות עבור מערכת אורתוגונאלית:**

- נתונה מערכת פולינומים אורתוגונאליים $\{p_n(x)\}$ אזי כל איבר מהמערכת $p_n(x)$ מאונך לכל פולינום אחר (לאו דווקא מהמערכת) מסדר m כאשר $m < n$.
- מבין כל מערכות הפולינומים המתוקנים (המקדם של החזקה הגבוהה ביותר שווה 1) לפולינומים האורתוגונאליים המתוקנים יש את הנורמה המינימאלית.

$$p_n(x) = \mu_n x^n + \ldots + \mu_1 x + \mu_0 \qquad \Rightarrow \qquad \|p_n(x)\|^2 = \frac{1}{\mu_n^2}$$

❖ **יחידות מערכת אורתוגונאלית**

בהינתן פונקצית משקל $p(x)$ מעל קטע (a,b) אזי קיימת מערכת אורתוגונאלית יחידה עם מקדם $\mu_n > 0$, (אם נתונות שתי מערכות אורתוגונאליות, $\{p_n(x)\},\{q_n(x)\}$ אזי מערכת $\{q_n(x)\}$ מקיימת $\{q_n(x)\} = (\pm 1)\cdot\{p_n(x)\}$)

❖ **תכונת הסימטריה**

- עבור פולינומים אורתוגונאליים עם פונקצית $p(x)$ משקל זוגית, דהיינו, מתקיים $p(x) = p(-x)$ מעל קטע $[-a,a]$. אזי מתקיים $p_n(-x) = (-1)^2 p_n(x)$.
- אם פונקצית המשקל זוגית $p(x) = p(-x)$ על קטע סימטרי $[-a,a]$, אזי כל $p_n(x)$ גם סימטרית.

❖ עבור כל פולינום בקטע סופי $[a,b]$ מתקיים $|c_k| < C = \max\{|a|,|b|\}$, $\forall k$, דהיינו, מקדמי פורייה של כל פולינום חסומים.

❖ **שוויון תלת נסיגה**

- נתונה מערכת אורתונורמאלית $\{p_n(x)\}$ מעל קטע (a,b) עם פונקצית משקל $p(x)$

בהינתן $p_n(x)=\mu_n x^n+\ldots+\mu_1 x+\mu_0$ מתקיים כלל הנסיגה:

$$\left(\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}\right)p_{n+1}(x)=(x-c_n)p_n(x)+\left(\frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}\right)p_{n-1}(x)$$

$$c_k=\int_a^b x\cdot p_n(x)\cdot p_k(x)\cdot p(x)dx$$

אם ידועים $\{c_0,\mu_0,p_0(x),p_1(x)\}$ ניתן לחשב את כל המערכת.

- משוואות הנסיגה עבור פולינומים אורתוגונאליים מנורמלים ($\tilde{p}_n(x)$)

$$\tilde{p}_{n+1}(x)=\tilde{p}_n(x)(x-c_n)-\lambda_{n-1}^2\,\tilde{p}_{n-1}(x) \qquad \lambda_{n-1}\equiv\frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}$$

- אם פונקצית המשקל זוגית $p(x)=p(-x)$ על קטע סימטרי $[-a,a]$, נקבל את המשוואות: $\tilde{p}_{n+1}(x)=x\cdot\tilde{p}_n(x)-\lambda_n^2\,\tilde{p}_{n-1}(x)$. ($c_n=0$)

❖ **זהות דרבו-כריסטופל**

$$\sum_{k=0}^{n}p_k(x)p_k(t)=c_{n+1}\cdot\left[\frac{p_{n+1}(x)p_n(t)-p_{n+1}(t)p_n(x)}{x-t}\right]$$

$$c_{n+1}\equiv\lambda_n\equiv\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}$$

❖ הביטוי $\sum_{k=0}^{n}p_k(x)p_k(t)$ נקרא **הגרעין של כריסטופל**.

❖ תכונות אפסים של $P_n(x)$

אם $P_n(x)$ פולינום ממערכת פולינומים $\{P_n(x)\}$ על קטע $[a,b]$, אזי:

- כל האפסים ξ_n כך שמתקיים $P_n(\xi_n)=0$ ממשיים, ראשוניים.

  (ללא ריבוב / ריבוי גדול מ- 1) ונמצאים בקטע (a,b).

- אם ξ הינו שורש של $P_n(x)$ אזי הוא איננו שורש של $P_{n+1}(x)$ ולהיפך.
- אם ξ הינו שורש של $P_n(x)$ אזי $P_{n+1}(\xi)\cdot P_{n-1}(\xi)<0$
- *הפרדת אפסים:*

יהיה $\xi_k^{(n)}$ השורש ה- k של פולינום $P_n(x)$.

$$a<\xi_1^{(n)}<\ .\ .\ .<\xi_k^{(n)}<\ .\ .\ .<\xi_n^{(n)}<b$$

יהיה $\omega_l^{(n+1)}$ השורש ה- l של פולינום $P_{n+1}(x)$.

$$a<\omega_1^{(n+1)}<\ .\ .\ .<\omega_k^{(n+1)}<\ .\ .\ .<\omega_n^{(n+1)}<b$$

אזי בין כל שני שורשים של $P_n(x)$ נמצא שורש של $P_{n+1}(x)$

$$a<\omega_1^{(n+1)}<\xi_1^{(n)}<\ .\ .\ \omega_{k-1}^{(n+1)}<\xi_k^{(n)}<\omega_k^{(n+1)}<\ .\ .\ .<\xi_n^{(n)}<\omega_n^{(n+1)}<b$$

❖ משפט פיקונה

נתון $f(x)\in CL^2_{P(x)}[a,b]$, כאשר $P(x)$ הינה פונקצית משקל.

נסמן ב- c_n את מקדמי הפורייה של $f(x)$, דהיינו, $c_n=<f(x),p_n(x)>$

נסמן ב- $S_n(f,x)=S_n(x)$ את הסכומים החלקיים של טור הפורייה $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k p_k(x)$

נסמן את ההפרש ב- $\varphi(x)$, דהיינו, $\varphi(x)=f(x)-S_n(x)$

אזי ל- $\varphi(x)$ יש לפחות n+1 אפסים מעל קטע $[a,b]$

❖ מרחב ליפשיץ Lip_M^{α}

פונקציה $f(x)$ שייכת למרחב Lip_M^{α} אם היא מקיימת $|f(x)-f(t)|\le M\cdot|x-t|^{\alpha}$

❖ התכנסות

- נתונה פונקציה $f(x)\in Lip_M^1$ בסביבה $(x-\delta,x+\delta)$, כמו-כן, לכל n מתקיים $|p_n(x)|\le k$ אזי $\lim_{n\to\infty} S_n(x)=f(x)$ בסביבה $(x-\delta,x+\delta)$. *התכנסות נקודתית.*
- נתונה פונקציה $f(x)\in Lip_M^1$ בקטע $[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$, כמו-כן, לכל n מתקיים $|p_n(x)|\le k$ אזי $\lim_{n\to\infty} S_n(x)=f(x)$ בקטע $[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$. *התכנסות במידה שווה.*

❖ הצגת רודריגו

לכל פולינום קלאסי, עם משקל פירסון, המקיים

$$A(x)=ax+b \;,\; B(x)=c_1x^2+c_2x+c_3 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{A(x)}{B(x)}=\frac{y'}{y}$$

יש הצגת רודריגו, דהיינו: $p_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$

3.3.13

פולינומים אורתוגונליים

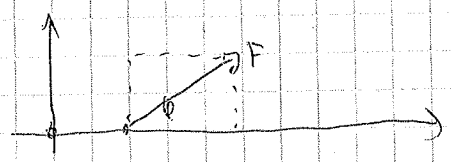
מכפלה פנימית

הרצאה 1

ב- $\mathbb{R}^2$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |a|\cdot|b|\cos(\varphi)$$

ב- $\mathbb{R}^2$ ההגדרה באה מהגיאומטריה ומתארת עבודה של כח $\vec{F}$ על גוף ובגיון ?



עבודה $W = |F_s|\cdot|S|\cdot\cos(\varphi)$

תכונות המכפלה הפנימית

$\langle a, a \rangle = |a|^2 \Rightarrow |a| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$

$\langle \vec{a}, b \rangle = \langle b, a \rangle$

$\langle a+b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle$

$|\langle a, b \rangle| \leq |a|\cdot|b|$

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle a, b \rangle}{|a|\cdot|b|}$$

ניתן לפרק כל וקטור לפי קואורדינטות

$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

נתבונן בשני הוקטורים

$$\begin{cases} \vec{a} = x_1 i + y_1 j + z_1 k \\ \vec{b} = x_2 i + y_2 j + z_2 k \end{cases}$$

$\langle i, i \rangle = \langle j, j \rangle = \langle k, k \rangle = 1$

$\langle i, j \rangle = \langle j, k \rangle = \langle k, i \rangle = 0$

נובע כי $\langle a, b \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

הגדרה: יהי מרחב V מעל שדה F ($\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$) V מרחב לינארי. עם הפעולות כפל וחיבור.

מכפלה פנימית בין 2 וקטורים $\forall u, v$ תוגדר

$\langle u, v \rangle = \alpha \in F$

בכך שמתקיימות התכונות להלן:

I) $\langle u,u\rangle \geq 0$

II) $\langle u,u\rangle = 0 \quad \text{iff} \quad u=0$

III) $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$

IV) $\langle \alpha u,v\rangle = \alpha\langle u,v\rangle \qquad \alpha\in F$

$\langle u,\alpha v\rangle = \bar{\alpha}\langle u,v\rangle$ נובע

V) $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle \qquad \forall u,v,w\in V$

כל פעולה המקיימת את התנאים נקרא מכפלה פנימית.

תשובות לפי תרגילים 1

1) האם הביטויים הבאים מגדירים מרחב מכפלה פנימית במרחב $C[-1,2]$?

א) $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{2} |f+g|\,dt$

נבדוק את האקסיומות בהגדרות

תכונה I $\quad \langle f,f\rangle = \int_{-1}^{2} |f+f|\,dt = 2\int_{-1}^{2} |f|\,dt \geq 0$

תכונה IV $\quad \langle \alpha f,g\rangle = \int_{-1}^{2} |\alpha f+g|\,dt \neq \alpha\int_{-1}^{2} |f+g|\,dt$

לא מתקיימת

מסקנה: המכפלה לעיל אינה מכפלה פנימית.

עקרונית לא צריך לבדוק עוד תנאים בהגדרה, אבל אם נבדוק אזי גם תכונה V לא מתקיימת.

ב) $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{2} f\cdot\bar{g}\,dt + f(-1/2)\overline{g(-1/2)}$

נבדוק את התנאי הראשון בהגדרה

$\langle f,f\rangle = \int_{-1}^{2} f\cdot\bar{f}\,dt + f(-1/2)\overline{f(-1/2)} = \int_{-1}^{2} |f|^2\,dt + |f(-1/2)|^2$

בדיקת התנאים בהגדרה מורה כי המכפלה הנ"ל אכן מכפלה פנימית.

ג) גם הגדרה זו מוגדרת בהגדרה.

$\langle f,g\rangle = 3\int_{-1}^{2} f\cdot\bar{g}\,dt$

ג)

$$\langle f,g\rangle = f(0)\overline{g(0)} + f(1)\overline{g(1)}$$

נבדוק את התנאים

$$\langle f,f\rangle = |f(0)|^2 + |f(1)|^2$$

נדרש

$$\langle f,f\rangle = 0 \Rightarrow f=0$$

אבל לפי ההגדרה מסתיק כי $f(0)=f(1)=0$

דהיינו, ההגדרה של מכפלה פנימית בסעיף דורשת רק 2 נקודות שיתאפסו, ולא כל הפונקציה.

מסקנה: ההגדרה הנ"ל איננה מכפלה פנימית.

2) האם אפשר להגדיר מכפלה פנימית במרחב $C^2[-\pi,\pi]$ לפי

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\overline{g''(x)}\,dx + f(-\pi)\overline{g(-\pi)}$$

נבדוק את התנאים:

$$\langle f,f\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|^2\,dx + |f(-\pi)|^2$$

$$\langle f,f\rangle = 0 \Rightarrow f''(x)=0 \quad \& \quad f(-\pi)=0$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow f(x)=Ax+B$$

$$f(-\pi)=0$$

מכיוון ש- $f(x)$ ישר, התנאי לא מתקיים, ולכן איננו מכפלה פנימית.

3) האם ההגדרה $\langle f,g\rangle = f(0)\overline{g(0)} + f'(0)\overline{g'(0)} + f(1)\overline{g(1)}$

מהווה מכפלה פנימית על המרחב $C[0,1]$

בל מרחב-מרחב $P_2 = \mathrm{Span}\{1,x,x^2\}$

פתרון: אין לא מכפלה פנימית, כי תנאי I לא מתקיים. (כלומר אותה f, מסעיף ב)

בל כעת המרחב שלנו הוא $P_2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2$

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = 0 \quad \text{iff} \quad \alpha=\beta=\gamma=0$$

מעל תת-המרחב המוגדר, המכפלה הנ"ל כן תהווה מכפלה פנימית.

ד) אילו מבין הביטויים הבאים מהווה מכפלה פנימית?

א) $\langle f,g\rangle = f(0)\overline{g(0)} + \int_0^1 f'\overline{g'}\,dt$ מעל $C[0,1]$

לא מכפלה פנימית.

ב) $\langle f,g\rangle = f(0)\overline{g(0)} + f'(1)\overline{g'(1)}$ מעל $C[0,1]$

לא מכפלה פנימית

ג) $\langle f,g\rangle = 2\int_0^{1/2} f\bar{g}\,dt - \int_{1/2}^1 fg\,dt$

נבדיק את התנאים

$$\langle f,f\rangle = 2\int_0^{1/2}|f|^2\,dt - \int_{1/2}^1 |f|^2\,dt$$

נטבע לראות כי המכפלה הזו לא סימטרית בתנאי I, II

יש לתת דוגמא נגדית, נגדיר פונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-2x} & 0\le x\le 1/2\\ 2\sqrt{x-1/2} & 1/2\le x\le 1\end{cases}$$

עבור פונקציה זו נקבל $\langle f,f\rangle = 0$ ולכן זו אינה מכפלה פנימית.

$$\langle f,f\rangle = 2\int_0^{1/2}(1-2x)\,dx - 4\int_{1/2}^1 (x-1/2)\,dx$$

$$= 2(x-x^2)\Big|_0^{1/2} - 4(x^2-1/2x)\Big|_{1/2}^1$$

$$= 0$$

המכפלה $\langle f,f\rangle = 0$ אבל $f(x)\neq 0$.

הגדרה: אם לכל וקטור $v\in V$, V מרחב לינארי, מתקיימים התנאים:

I) $\|v\|\geq 0$

II) $\|v\|=0$ iff $v=0$

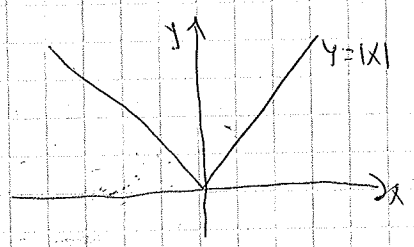
III) $\|\alpha v\| = |\alpha|\cdot\|v\|$

IV) $\forall x,y\in V \quad \|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

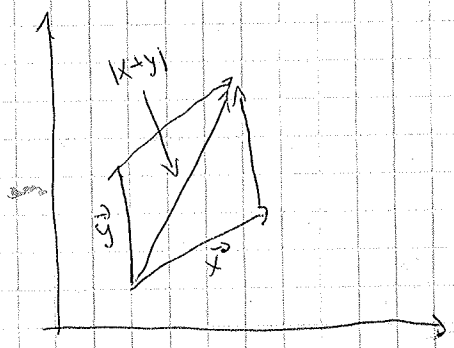
אזי הפונקציה $\|\cdot\|$ תקרא הנורמה.

נתבונן בפונקציית הערך המוחלט

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



נבדוק את אי-שוויון המשולש ב- $\mathbb{R}^2$. יהיו 2 וקטורים $\vec{x}$, ו- $\vec{y}$.
ונתבונן את הוקטורים לפי המקבילית.
ונקבל את אי-שוויון המשולש.



הערה: אם מעל מרחב לינארי V מוגדרת מכפלה פנימית,
אזי המכפלה הפנימית מגדירה נורמה לפי

$$\|x\| \triangleq \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

יש לבדוק כי ההגדרה מהגדרנו עונה על כל הדרישות
של הנורמה, בעיקר התנאי של אי-שוויון המשולש.

נניח כי ארכן כל מכפלה פנימית מגדירה נורמה (לפחות פתרון)
לתרגיל 5.

5) יש להוכיח את הזהות

$$\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b |f(x)g(y)-g(x)f(y)|^2\,dx\,dy = \|f\|^2\cdot\|g\|^2 - |\langle f,g\rangle|^2$$

$$\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b [f(x)g(y)-g(x)f(y)]\cdot[\overline{f(x)}\,\overline{g(y)}-\overline{g(x)}\,\overline{f(y)}]\,dx\,dy$$

$$\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b [\|f(x)\|^2\|g(y)\|^2+\|g(x)\|^2|f(y)|^2-f(x)\overline{g(x)}\,\overline{f(y)}g(y)-\overline{f(x)}g(x)f(y)\overline{g(y)}]\,dx\,dy$$

$$\frac{1}{2}\int_a^b |f(x)|^2\,dx\int_a^b |g(y)|^2\,dy+\int_a^b |g(x)|^2\,dx\int_a^b |f(y)|^2\,dy$$

$$-\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx\int_a^b \overline{f(y)}g(y)\,dy-\int_a^b \overline{f(x)}g(x)\,dx\int_a^b \overline{f(y)}g(y)\,dy\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \|f\|^2\|g\|^2 + \|g\|^2\|f\|^2 - 2|\langle f,g\rangle|^2 \right\}$$

$$= \|f\|^2\|g\|^2 - |\langle f,g\rangle|^2$$

המשלים

המשמעות של הכפלת הינה תיפוך השוויון, נסמנה ב- Δ

$$\|f\|^2\|g\|^2 - |\langle f,g\rangle|^2 = \Delta$$

קיבלנו את אי-השוויון קושי-שוורץ-בוניאקובסקי!

הטוען כי

$$\|f\|^2\cdot\|g\|^2 \geq |\langle f,g\rangle|^2$$

וכעת אנו יכולים להוכיח את אי השוויון.

הערה: עבור שני וקטורים ב- $\mathbb{R}^n$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad , \quad \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

לכן אם נתבונן בשני פונקציות $f(x), g(x)$ אזי

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \sum_i f(x_i)g(x_i) \xrightarrow[\text{בגבול}]{} \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

נתבונן כעת <u>להוכחת אי-שוויון קושי-שוורץ-בוניאקובסקי</u>

בדרך רגילה (עבורות שעסו בפתרון תרגיל 5 וקיבלנו הנכונה).

דהיינו, נוכיח

$$|\langle u,v\rangle|^2 \leq \|u\|^2\cdot\|v\|^2$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \ , \ \forall u,v \in V$$

$$\|u-\lambda v\|^2 = \langle u-\lambda v, u-\lambda v\rangle = \langle u,u\rangle + |\lambda|^2\langle v,v\rangle - \lambda\langle v,u\rangle - \bar{\lambda}\langle u,v\rangle$$

$$= \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 - \lambda\overline{\langle u,v\rangle} - \bar{\lambda}\langle u,v\rangle$$

ומכיוון שהשוויון נכון לכל λ, מעל $\mathbb{C}$, נבחר $\lambda = \alpha\langle u,v\rangle$

כאשר $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, ונקבל

$$\|u-\lambda v\|^2 = \|u\|^2 + \alpha^2\|\langle u,v\rangle\|^2\cdot\|v\|^2 - 2\alpha|\langle u,v\rangle|^2$$

נסמן:

$$A = |\langle u,v\rangle|^2\|v\|^2$$

$$B = |\langle u,v\rangle|^2$$

$$C = \|u\|^2$$

ונקבל שדרישת הגדול מאפס

כי התקבלנו מ-

$A\alpha^2 + 2\alpha B + C \geq 0$

$\|u - \lambda v\|^2 \geq 0$

נבדוק כי $A \geq 0$, $\delta < 0$ (הכרבולה מעל ציר ה-x).

$\delta = B^2 - AC < 0$

נציב את A, B, C

$|\langle u,v\rangle|^2 - |\langle u,v\rangle|^2 \|v\|^2 \cdot \|u\|^2 \leq 0$

$|\langle u,v\rangle|^4 \leq |\langle u,v\rangle|^2 \|u\|^2 \|v\|^2$

$|\langle u,v\rangle|^2 \left(|\langle u,v\rangle|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \right) \leq 0$

לאור $\langle u,v\rangle \neq 0$

$|\langle u,v\rangle|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 < 0$

הוכחנו את אי-שוויון קושי-שוורץ.

הרצאה:
10.3.13

חזרה

בהרצאה הקודמת ראינו הגדרות למושגים הבאים:

I) מרחב מכפלה פנימית

II) נורמה

וראינו את המשפטים הבאים:

I) אי-שוויון קושי-שוורץ בוניאקובסקי.

II) אי-שוויון המשולש (למה הוכרחה בהרצאה הקודמת)

<u>הוכחת אי-שוויון המשולש</u>

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle$$
$$= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$$
$$= \|u\|^2 + \langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle} + \|v\|^2$$
$$= \|u\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\{\langle u,v\rangle\} + \|v\|^2$$

$$\mathrm{Re}\{\langle u,v\rangle\} \le |\mathrm{Re}\{\langle u,v\rangle\}| \le |\langle u,v\rangle| \underset{\text{אי-שוויון קושי-שוורץ}}{\le} \|u\|\cdot\|v\|$$

$$\|u+v\|^2 \le \|u\|^2 + 2\|v\|\cdot\|u\| + \|v\|^2 = (\|u\|+\|v\|)^2$$

$$\|u+v\| \le \|u\| + \|v\| \quad \text{מ"ל}$$

<u>הגדרה:</u> תהיו 2 וקטורים $u,v \in V$ במרחב מכפלה פנימית.

אם $\langle u,v\rangle = 0$ אז נאמר שהוקטורים u,v ניצבים $u \perp v$

דוגמא: נתבונן בוקטור $u = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$

נשתמש לקבל את המקדם x של כיוון i

$\langle u,i\rangle = x \quad (\langle i,i\rangle = 1)$

$\langle u,j\rangle = y \quad (\langle j,j\rangle = 1)$

הגדרה: נתון מרחב מכפלה פנימית. אם עבור סדרה $\{u_n\}$ מתקיים עבור כל n,m

$$\langle u_n, u_m \rangle = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \|u_m\|^2 & n = m \end{cases}$$

אזי הסדרה $\{u_n\}$ מהווה מערכת אורתוגונלית.

דוגמא: נתבונן בוקטור $f \in V$

אם ניתן לרשום את f לפי הטור

$$f = \sum_k a_k u_k \quad , \quad a_k \in \mathbb{F}$$

הטבעי לקבל את המקדמים a_k של u_k

$$\langle f, u_m \rangle = \langle \sum_k a_k u_k , u_m \rangle = \sum_k a_k \langle u_k, u_m \rangle = \begin{cases} a_m \|u_k\| & k = m \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

מסקנה

$$a_m = \frac{\langle f, u_m \rangle}{\|u_m\|^2}$$

הגדרה: המקדמים a_m יקראו <u>מקדמי פוריה</u> של f לפי מערכת אורתוגונלית $\{u_m\}$

אם המערכת היא גם אורתונורמלית, דהיינו, מתקיים

$$\langle \hat{u}_k, \hat{u}_m \rangle = \delta_{k,m} = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$$

אזי לכל k $\|u_k\| = 1$, ונרשום את מקדמי הפוריה

$$a_m = \langle f, \hat{u}_m \rangle$$

הביטוי $f = \sum_k a_k u_k$ מהווה הצגה של f במרחב בעזרת הסדרה $\{u_k\}$

הערה: הטור הנ"ל איננו בהכרח סופי

הטור הנ"ל צריך להתכנס לפי הנורמה שהוגדרה במרחב.

סקרנות, הנורמה מושרית מהמכפלה הפנימית

(כך שניתן להמשיך לדבר על אי-שוויון המשולש למשל שהוכחתי

בשתמשת רק בנורמה כמושרה ממכפלה פנימית)

דוגמא: נתבונן במערכת אורתוגונלית, בקטע $[-\pi,\pi]$

$\{1, \cos(kx), \sin(kx)\}_{k=1\to\infty}$

עם המכפלה הפנימית (הסטנדרטית)

$$\langle u,v\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} u(t)v(t)\,dt$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos(kx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin(kx)\,dx = 0$$

$$\langle \sin(kx), \sin(mx)\rangle = \begin{cases} \pi & k=m \\ 0 & k\neq m \end{cases}$$

$$\langle \cos(kx), \cos(mx)\rangle = \begin{cases} \pi & k=m \\ 0 & k\neq m \end{cases}$$

$$\langle \cos(kx), \sin(mx)\rangle = 0$$

המערכת הנ"ל אורתוגונלית.

בשביל לקבל מערכת אורתו-נורמלית יש לנרמל את המערכת

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} \right\}$$

אנו מדברים על פונקציה $f(x)$ המתלבדת עם מחזור $T=2\pi$

ומתקיים

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx$$

ולכן, נבחר בגבולות התחום $[-\pi,\pi]$.

<u>משפט דירכלה:</u> אם $f(x)$ רציפה למקוטעין אזי $f(x)$ שווה לטור פוריה שלה

ומנקודות האי-רציפות מתקיים

$$\tfrac{1}{2}\left[f(x_+)+f(x_-)\right] = \text{סכום הטור}$$

דוגמא: שימוש בנורמות

יהי וקטור x הנתון ע"י $x = \sum_{k=1}^{n} x_k$

כאשר הוקטורים x_k מקיימים

$$\langle x_k, x_m \rangle = \begin{cases} \|x_k\|^2 & k=m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$$

$$\langle x, x \rangle = x^2 = \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \|x_k\|^2$$

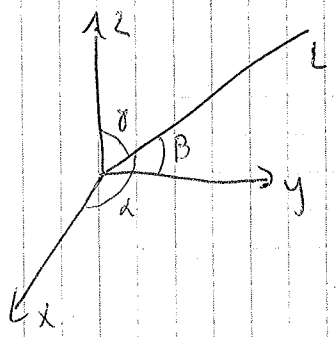
וקיבלנו את משפט פיתאגורס עבור $N=2$

ואת משפט פרסבל עבור N כללי.

דף תרגילים 2 - מרחק מנקודה לישר

1) מצא היטל של וקטור $a = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ על קו L

היוצר עם הצירים x, y, z זוויות שוות תבדוק $\alpha = \beta = \gamma$?



ראשית נמצא את כיווני הישר L

נתון כי הזוויות שוות, $\alpha = \beta = \gamma$

$$\cos(\alpha) = \cos(\beta) = \cos(\gamma)$$

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

$$3\cos^2(\alpha) = 1 \Rightarrow \cos(\alpha) = 1/\sqrt{3}$$

$$R_e(\bar{a}) = \langle a, \vec{l} \rangle \quad ; \quad a = \{2, 5, 1\}$$

היטל הוקטור $\vec{a}$

על קו L

$$\langle \vec{a}, l_i \rangle = |\bar{a}| \cdot |\bar{l}_i| \cdot \cos(\varphi) = |\bar{a}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$L = \{\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)\} = \{1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\}$$

$$\langle a, l_i \rangle = \frac{2+1+5}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

ב) מצא את הזווית בין הוקטורים

$a = (7, 2, -1)$

$b = (1, 2, -3)$

פתרון:

$$\cos(a, b) = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}$$

$$\langle a, b \rangle = 7 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1)(-3)$$

ג) למציאת היטל של וקטור a על וקטור b

נורמל את וקטור b, ואז נבלע מכפלה פנימית.

היטל תמיד הינו מכפלה פנימית בין וקטור לכיוון (וקטור מנורמל).

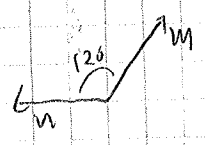
ו) מצא זווית בין וקטורים

$a = 2\hat{m} + 4\hat{n}$, $\vec{b} = \hat{m} - \hat{n}$

$|\hat{m}| = |\hat{n}| = 1$

כאשר הוקטורים $\hat{m}, \hat{n}$ יחידות

והזווית בין הוקטורים 120°



$$\langle a, b \rangle = (2\hat{m} + 4\hat{n}) \cdot (\hat{m} - \hat{n})$$

$$= 2\hat{m}^2 + 4\hat{n}\hat{m} - 2\hat{m}\hat{n} - 4\hat{n}^2$$

$$= 2 + 2\cos(120) - 4$$

$$= -2 + 2 \cdot (-1/2)$$

$$= -3$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a^2} = \sqrt{(2m + 4n)^2}$$

$$= \sqrt{4m^2 + 16m \cdot n + 16n^2}$$

$$= \sqrt{20 - 8}$$

$$= \sqrt{12}$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{b^2} = \sqrt{(m - n)^2}$$

$$= \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn}$$

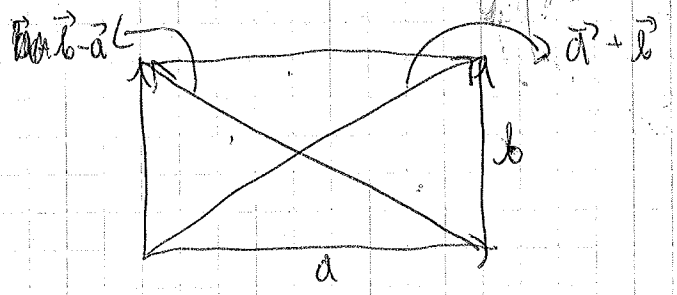
$$= \sqrt{1 + 1 + 1}$$

$$= \sqrt{3}$$

$$\cos(a, b) = \frac{\langle a, b \rangle}{|a| \cdot |b|} = \frac{-3}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = -\frac{1}{\sqrt{4}}$$

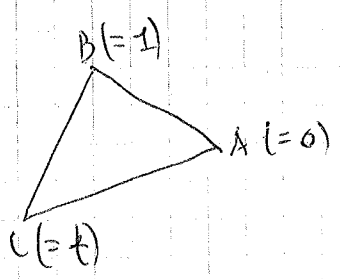
7) הוכח כי זווית φ בין אלכסונים של מלבן עם צלעות $\vec{a}, \vec{b}$

מקיימת את השוויון $\cos(\varphi) = \pm \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$



8) מצא את זווית המשולש שקודקודיו בנקודות $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=t$

במרחב $C[-1,1]$ כאשר המכפלה הפנימית $\langle x,y\rangle = \int_{-1}^{1} x\cdot y\,dt$



$AB = 1 \quad , \quad BC = t-1 \quad , \quad AC = t$

$\measuredangle C \Rightarrow \frac{\langle CA, CB\rangle}{\|CA\|\cdot\|CB\|} = \frac{\langle 1-t, -t\rangle}{\|1-t\|\cdot\|-t\|}$

10) חשב את העבודה של שדה וקטורי

$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)i + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)j + z^2 k = Pi + Qj + Rk$

לאורך המסלול $r(t) = 2\cos(t)\,i + 2\sin(t)\,j + 3tk$

מנקודה $A=(2,0,0)$ עד $B=(2,0,6\pi)$

פתרון: עבודה מוגדרת כמה מוכפל בדרך, דהיינו $\langle F, r\rangle$

$dw = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

$F = (P,Q,R) \qquad dr = \{dx, dy, dz\}$

$W = \int_A^B dw$

את מתקיימים התנאים

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

דה"נ $\operatorname{rot}(F) = 0$

אזי נאמר שהיא פוטנציאלי, והאינטגרל לא תלוי בדרך

והאבודה בכל מסלול סגור שווה ל-0.

במקרה שלנו התנאים מתקיימים

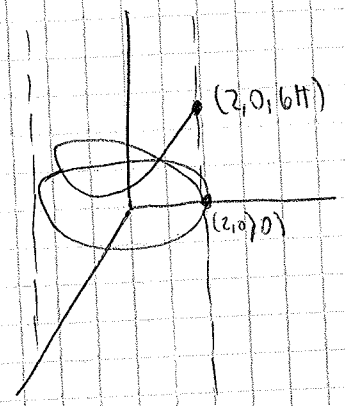
$$P = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad ; \quad Q = \frac{x}{x^2+y^2} \quad ; \quad R = z^2$$

מסלול האינטגרציה (המסלול על פיון הכדור)

הינו לעובדה אלא, הפיס הזאת אינו מעגל שרדיוסו 2

שבו מקדמי הקואורדינטות (x,y) של וקטור הכיוון $\vec{r}$.

ההתקדמות הינה בדרגת סיבוב. (דלא הבורג)



במקרה שלנו הינת נקודה סינגולרית שבה $(x,y) = (0,0)$

שכן P, Q לא מוגדרת.

בשביל לחשב את האינטגרל נציב את מקדמי וקטור המסלול בכדור.

$$\begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 2\sin(t) \\ z = 3t \end{cases} \qquad \begin{aligned} dx &= -2\sin(t)\,dt \\ dy &= 2\cos(t)\,dt \\ dz &= 3\,dt \end{aligned}$$

$$P = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-2\sin(t)}{4}$$

$$dW = F(t)\,dt = \int \frac{-2\sin(t)}{4}\cdot(-2\sin(t)) + \frac{2\cos(t)\cdot 2\cos(t)}{4} + 9t^2\cdot 3 \Big]$$

$$dW = \sin^2(t) + \cos^2(t) + 27t^2 = (1 + 27t^2)\,dt$$

$t: 0 \longrightarrow 2\pi$

$$dW = \int_0^{2\pi} dF = \int_0^{2\pi} (1 + 27t^2)\,dt = 2\pi + 9\cdot 8\pi^3$$

אם לא הייתה נקודה סינגולרית

אזי היה ניתן לדעת את הפרש הפוטנציאל בין נקודות A ו-B

ע"י הנקת הפרש הפוטנציאל בין הנקודות. (אין צורך באינטגרל)

אבל מכיוון שיש נקודה סינגולרית, יש צורך לבדוק את האינטגרל

לאורך המסלול.

17.3.13

הרצאה 3

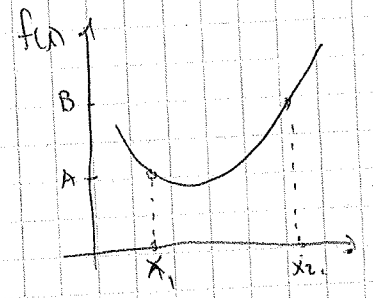
אי-שוויון יאנסן

I) אי-שוויון יאנסן (Jensen)

משפט: אם פונקציה $f(x)$ קמורה $(\forall)$

כלומר, גרף הפונקציה נמצא מתחת לכל שני נקודות מתוכרות

הגדרה טכנולוגית: כל הישר מעל כל מעגל.



$\forall x_1, x_2 \quad x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \quad \alpha \in [0,1]$

אזי לפי הגדרה

$$f[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

$$f''(x) > 0$$

אי-שוויון יאנסן מהווה הכללה של ההגדרה.

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1 \qquad f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k) \qquad \forall \alpha_k \in [0,1]$$

מבחן פיזיקאלי: נתבונן ב-n מסות הנמצאות על גרף (קשת).

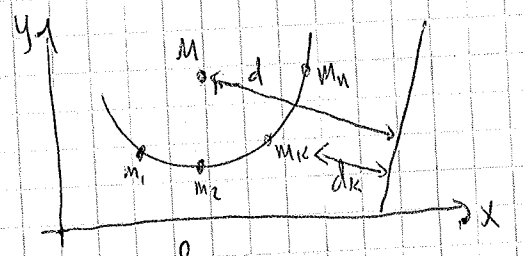
אזי מרכז המסה נמצא בנקודה המייצגת את כל המסות.

כך שאם נרכז את כל המסה באותה הנקודה

המומנט יהיה שווה.

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k$$

$$M \cdot d = \sum_{k=1}^{n} m_k d_k$$



m_k - המסה של גוף k

d_k - המרחק של גוף k מהציר

M - סך המסה בנקודת מרכז הכובד.

d - המרחק של נקודת הכובד מהציר.

$$d = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k d_k}{M} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{m_k}{M}\right) d_k$$

אם הקשת תתואר כ- $f(x)$

אי-שוויון יאנסן יקבל מבטיקה. נסמן את מרכז המסה ב- (y_0, c)

הוכחה: באמצעות אינדוקציה

עבור $n=2$ נכון לפי הגדרה.

נניח שהאי-שוויון נכון עבור $n-1$, דהיינו

$$f\left(\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k f(x_k) \qquad \forall \alpha_k \in [0,1] \quad \sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k = 1$$

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\right) = f\left[\alpha_1 x_1 + (1-\alpha_1)\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{\alpha_k}{1-\alpha_1}\right)x_k\right] \qquad \alpha_1 \ne 1$$

נכון לפי הגדרה

$$\le \alpha_1 f(x_1) + \left[(1-\alpha_1)\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{\alpha_k}{1-\alpha_1}\right)f(x_k)\right]$$

לפי הנחת האינדוקציה

$$\le \alpha_1 f(x_1) + (1-\alpha_1)\sum_{k=2}^{n}\left[\left(\frac{\alpha_k}{1-\alpha_1}\right)f(x_k)\right]$$

$$= \alpha_k \sum_{k=1}^{n}\alpha_k f(x_k)$$

III אי-שוויון יונג (Yung)

משפט: נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה מעל $[0,\infty)$ כאשר מתקיים $f(0)=0$

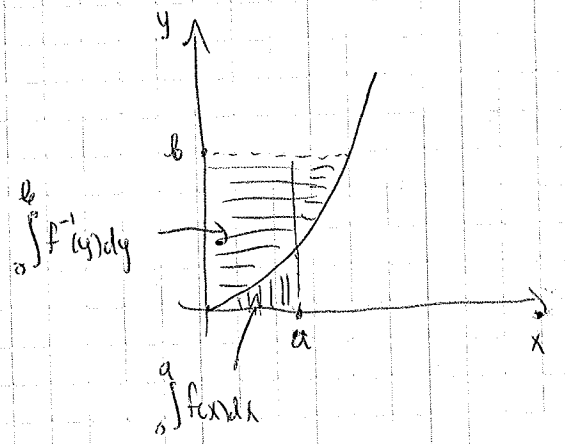
כמו-כן $f(x)$ מונוטונית.

אזי לכל $a,b>0$, מתקיים האי-שוויון

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy \ge a\cdot b$$

הוכחה: באמצעות גרפים

$f(x)$, מונוטונית ורציפה, ולכן $f(x)$ הפיכה.



כפי שניתן לראות בשרטוט

השטח של המלבן ab הינו

גדול מהשטח של שני האינטגרלים

נשתמש בטכניקה הבאה:

נתבונן בפונקציה $y = x^{p-1} \Rightarrow x = y^{\frac{1}{p-1}}$, $p>1$

נגדיר בביטוי הבא-שוויון יאנג

$$ab \le \int_0^a x^{p-1}\,dx + \int_0^b y^{\frac{1}{p-1}}\,dy$$

$$= \frac{x^p}{p}\Big|_0^a + \frac{y^{\frac{1}{p-1}+1}}{\frac{1}{p-1}+1}\Big|_0^b$$

$$= \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

כאשר $q \triangleq \frac{1}{p-1}+1 = \frac{p}{p-1}$

ומתקיים $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

קיבלנו:

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \forall a,b>0 \ , \ p>1$$

ההתלבטה נקראת אי-שוויון יאנג.

III) אי-שוויון הולדר (Hölder)

משפט: תהא $f(x) \in L^p(a,b)$ אם קיים אינטגרל סופי $\int_a^b |x|^p dt < \infty$

נגדיר נורמה בפונקציה גדולה מעל L^p $f(x) \in CL^p$

כמו-כן מוגדרת הנורמה $\|x\|_p = \left[\int_a^b |x|^p dt\right]^{1/p}$

כמו-כן נתונה פונקציה $y(t) \in L^q$, דהיינו

$\|y\|_q = \left[\int_a^b |y|^q dt\right]^{1/q}$, $\int_a^b |y(t)|^q dt < \infty$

ומתקיים הקשר $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

אזי מתקיים:

$$\int_a^b |x(t)y(t)|dt \le \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

כלומר, אי-שוויון Holder מהווה הכללה של אי-שוויון קושי-שוורץ

עבור $p=q=2$.

הוכחה: נסמן

$$a \triangleq \frac{|x|}{\|x\|_p} \qquad b = \frac{|y|}{\|y\|_q}$$

לפי אי-שוויון יונג

$$a \cdot b = \frac{|x(t)\cdot y(t)|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \le \frac{|x(t)|^p}{\|x\|_p^p \cdot p} + \frac{|y(t)|^q}{\|y\|_q^q \cdot q}$$

לפי אי-שוויון יונג מהגדרת a, b

הנורמה של x לפי p בחזקת p $\|x\|_p^p$

נבצע אינטגרציה על 2 הצדדים בתחום $[a,b]$

$$\frac{1}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q}\int_a^b |x(t)y(t)|dt \le \frac{1}{\|x\|_p^p \cdot p}\int_a^b |x(t)|^p dt + \frac{1}{\|y\|_q^q \cdot q}\int_a^b |y(t)|^q dt$$

ומכיוון שלפי הנתון

$$\int_a^b |x(t)|^p dt = \|x\|^p \quad ; \quad \int_a^b \|y(t)|^q dt = \|y\|^q$$

נקבל את האינטגרלים.

$$\frac{1}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q}\int_a^b |x(t)y(t)|dt \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ונקבל

$$\int_a^b |x(t)y(t)|dt \le \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

IV) אי-שוויון מינקובסקי (Minkovsky)

נטבע: יהיו $x(t), y(t) \in L^p$, $p \ge 1$ אזי מתקיים

$$\|y\|_p + \|x\|_p \ge \|y+x\|_p$$

הרחבה של אי-שוויון המשולש.

הוכחה:

$$\|x+y\|_p = \left[\int_a^b |x+y|^p\,dt\right]^{1/p}$$

$$\int_a^b |x+y|^p\,dt \le \int_a^b (|x|+|y|)^p\,dt = \underbrace{\int_a^b |x|(|x|+|y|)^{p-1}\,dt + \int_a^b |y|(|x|+|y|)^{p-1}\,dt}_{\text{אם נכניס תחת אינטגרל אחד}}$$

ונראה כל אחד בנפרד

$$\int_a^b |x|(|x|+|y|)^{p-1}\,dt + \int_a^b |y|(|x|+|y|)^{p-1}\,dt$$

אי-שוויון Hölder יתן ש-

$$\le \left(\int_a^b |x|^p\,dt\right)^{1/p}\cdot\left(\int_a^b (|x|+|y|)^{(p-1)q}\,dt\right)^{1/q}$$

$$+\left(\int_a^b |y|^p\,dt\right)^{1/p}\cdot\left(\int_a^b (|x|+|y|)^{(p-1)q}\,dt\right)^{1/q}$$

ומכיוון שנתון

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

נקבל בקיצור

$$(p-1)\cdot q$$

$$\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}=\frac{p-1}{p} \Rightarrow p=(p-1)q$$

$$\int_a^b (|x+y|)^p\,dt \le \|x\|_p\left(\int_a^b (|x|+|y|)^p\,dt\right)^{1/q} + \|y\|_p\left(\int_a^b (|x|+|y|)^p\,dt\right)^{1/q}$$

$$\int_a^b (|x+y|)^p\,dt \le \left[\|x\|_p+\|y\|_p\right]\cdot\left(\int_a^b (|x|+|y|)^p\,dt\right)^{1/q}$$

ולכן אם נחלק באינטגרל

$$\frac{\left(\int_a^b (|x|+|y|)^p\,dt\right)^1}{\left(\int_a^b (|x|+|y|)^p\,dt\right)^{1/q}} = \left(\int_a^b (|x|+|y|)^p\,dt\right)^{1-1/q} = \left(\int_a^b (|x|+|y|)^p\,dt\right)^{1/p}$$

ונקבל

$$\left(\int_a^b (|x|+|y|)^p\,dt\right)^{1/p} \le \|x\|_p+\|y\|_p$$

$$\|x+y\|_p \le \|x\|_p+\|y\|_p$$

פתרון תרגילים - אי-שוויונים

1) מה גדול יותר $\int_0^{\pi} e^{\sin^2(x)}dx$ או $\frac{3\pi}{2}$?

פתרון:

$$\int_0^{\pi} e^{\sin^2(x)}dx = ?$$

ידוע כי

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$$

$$e^{\sin^2(x)} = 1 + \sin^2(x) + \frac{\sin^4(x)}{2!} + \frac{\sin^6(x)}{3!} + \dots > 1 + \sin^2(x)$$

$$\sin^2(x) = \tfrac{1}{2}[1 - \cos(2x)]$$

$$1 + \sin^2(x) = 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\int_0^{\pi} e^{\sin^2(x)}dx > \int_0^{\pi}\left[\frac{3}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\right]dx = \frac{3\pi}{2}$$

ולכן

$$\int_0^{\pi} e^{\sin^2(x)}dx > \frac{3\pi}{2}$$

2) פונקציה $f(x)$ גזירה רציף (עם הנגזרת רציפה) ומקיימת מעל המקיימת

$$0 \le f'(1) \le 2f(1)$$

$$\int_0^1 f(x)dx \ge 0$$

הוכיחו: נרשום את המשוואות המשיק בנקודה 1

$$y = f(1) + f'(1)(x-1)$$

$$\int_0^1 f(x)dx \ge \int_0^1 [f(1) + f'(1)(x-1)]dx$$

לפי הנגזרת הקטנות

$$\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1$$

לפי: אינטגרציה בחלקים.

$u = x$ $\qquad v = \int f(x)dx$

$du = dx$ $\qquad dv = f(x)dx$

4.13

הרצאה

הנושאים לבחינה

I) המשך פתרון של תרגילים.

II) מרחבי L^p, l^p, $C[a,b]$, כל המקבילות.

III) נורמה פולינומיאלית, דוגמאות נוספות.

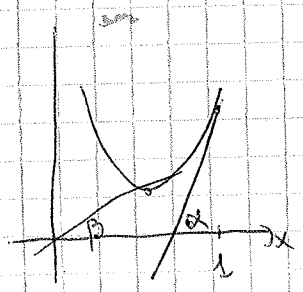
IV) מרחב מטרי, מרחב טיחונוב, תרגילים.

המשך פתרון של תרגילים מספר 3.

שאולה 2: פונקציה $f(x)$ גזירה רציף, וקמורה למטה, המקיימת

$$0 < f'(1) < 2f(1)$$

יש להוכיח $\int_0^1 f(x)dx > 0$



מכיוון שהפונקציה קמורה הרי שהגזירה תוחמת, והיא הכי גדולה בנקודה בקצה הקטע $x=1$.

מכיוון שהמשיק הוא מתחת לפונקציה בפונקציה קמורה למטה, מתקיים $f(x) \geq f(1) + f'(1)(x-1)$

לקחנו את משוואת המשק בנקודה $x=1$, שכן בנקודה זו השיפוע של המשיק הוא הגדול ביותר.

$$\int_0^1 f(x)dx \geq \int_0^1 [f(1) + f'(1)(x-1)]dx$$

$$= f(1) + f'(1)\frac{(x-1)^2}{2}\Big|_0^1$$

$$= f(1) - \tfrac{1}{2}f'(1)$$

ולפי הנתון התוצאה גדולה מאפס.

דרך נוספת - תשובה שירה:

$\int_0^1 f(x)dx =$ אינטגרציה בחלקים

$u = f(x)$ $\quad du = f'(x)dx$

$v = x$ $\quad dv = dx$

$$\int_0^1 f(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)dx = f(1) - \int_0^1 xf'(x)dx$$

$$\int_0^1 xf'(x)dx \le f'(1)\int_0^1 x\,dx = f'(1)\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \tfrac{1}{2}f'(1)$$

קיבלנו: $\int_0^1 f(x)dx \ge f(1) - \tfrac{1}{2}f'(1) > 0$

לפי הנתון.

ספרים להמלצה:

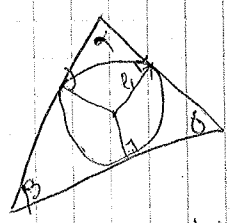
(*) Mazia W. Convexity

(*) Inequalities Hardy, Littlewood, Polya

תרגיל 3: הוכח, במשולש שזוויותיו α, β, γ

מתקיים אי-השוויון $\cos(\alpha)+\cos(\beta)+\cos(\gamma) \le 3/2$

פתרון: נראה כי המשולש אופטימלי



מהרכב המשולש נורד וקטורים e_i

אנכים לצלעות המשולש.

הזווית בין כל 2 וקטורים הינה זווית

מרכזית, והיא שווה פי 2 מזווית המול.

נחשב את הגודל

$$(e_1+e_2+e_3)^2 = e_1^2+e_2^2+e_3^2+2e_1e_2+2e_1e_3+2e_2e_3$$

$$e_ie_j = |e_i||e_j|\cos(180-*) = -\cos(*)$$

$$(e_1+e_2+e_3)^2 = 1+1+1-2[\cos(\alpha)+\cos(\beta)+\cos(\gamma)]$$

$$(e_1+e_2+e_3)^2 = 3-2[\cos(\alpha)+\cos(\beta)+\cos(\gamma)] \ge 0$$

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta)+\cos(\gamma) \le 3/2$$

תרגיל 4: הוכח את אי-השוויון $(a+b)^\alpha \le 2^{\alpha-1}(a^\alpha+b^\alpha)$

עבור $\alpha \ge 1$, $\forall a,b \ge 0$

פתרון: נחלק 2 אגפים ב- 2^α

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^\alpha \le \frac{a^\alpha+b^\alpha}{2}$$

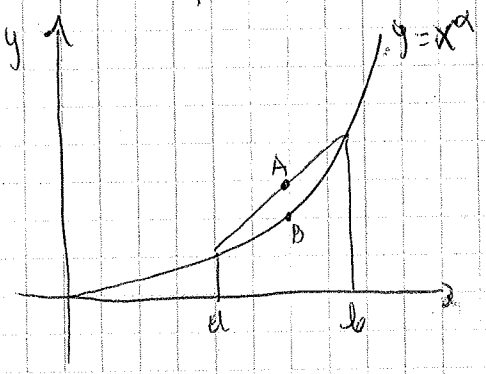
נתבונן בפונקציה

$y = x^\alpha$

$y' = \alpha x^{\alpha-1}$

$y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

$y'' > 0$



$A = \frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}$ $\qquad$ $B = \left[\frac{1}{2}(a+b)\right]^\alpha$

מכיוון שהפונקציה $y=x^\alpha$ קמורה, נקבל $A > B$

הערה: פונקציה קמורה ייחודית בעובדה כי

המיתר בין כל 2 נקודות חוסם את הפונקציה מלמעלה.

הגזירה בכל נקודה חוסמת את הפונקציה מלמטה.

תרגיל 5: הוכח אי-שוויון $a^\alpha - b^\alpha \le (a-b)^\alpha$

עבור $0 \le \alpha \le 1$ $\quad a > b > 0$

פתרון: ננית כי $\alpha = 1/3$ אזי נקבל

$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} \le \sqrt[3]{x-y}$

נחלק ב- $(a-b)^\alpha$ ונקבל

$$\frac{a^\alpha - b^\alpha}{(a-b)^\alpha} \le 1$$

$$\frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^\alpha}{\left(1 - \frac{b}{a}\right)^\alpha} \le 1$$

נסמן $\frac{b}{a} = t$, $0 \le t \le 1$

נתבונן בפונקציה $\varphi(t) = \frac{1-t^{\alpha}}{(1-t)^{\alpha}}$

$$\varphi(t=0) = 1$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{-\alpha t^{\alpha-1}(1-t)^{\alpha} + \alpha(1-t)^{\alpha-1}(1-t^{\alpha})}{(1-t)^{2\alpha}}$$

$$= \frac{\alpha(1-t)^{\alpha-1}\left[-t^{\alpha-1}(1-t) + (1-t^{\alpha})\right]}{(1-t)^{2\alpha}}$$

$$= \frac{\alpha(1-t)^{\alpha-1}\left[-t^{\alpha-1} + t^{\alpha} + 1 - t^{\alpha}\right]}{(1-t)^{2\alpha}}$$

$$= \frac{\alpha(1-t)^{\alpha-1}(1-t^{\alpha-1})}{(1-t)^{2\alpha}}$$

נתון כי $0 \le t \le 1$, $0 \le \alpha \le 1$

$$1-t^{\alpha-1} = 1 - \frac{1}{t^{1-\alpha}} < 0$$

ולכן המשפרת הקטנה מ-0, הפונקציה יורדת.

המכיוון ש- $\varphi(0) = 1$, אזי $\varphi(t) \le 1$

תרגיל 6: הוכח אי-שוויון $1 + 2\ln(x) \le x^2$

עבור $x > 0$

בתרגיל: $1 \le x^2 - 2\ln(x) = f(x)$

יש להראות כי המינימום של $f(x)$ גדול מ-1

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2-2}{x}$$

$$2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

נתון $x > 0$ ולכן $x_{min} = 1$

$$f(x_{min}) = 1$$

תרגיל 7: הוכחת אי-שוויון

$$\frac{\ln(x)}{x-1} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$$

עבור

$$x>0 \ , \ x\neq 1$$

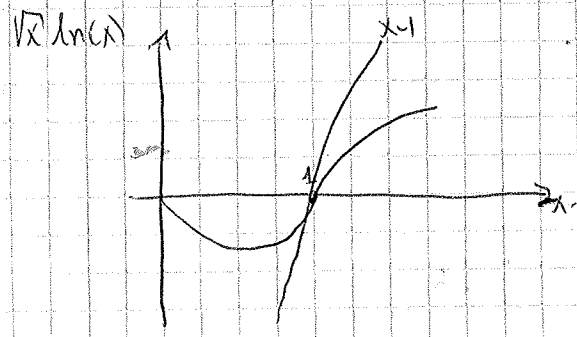
פתרון:

$$\frac{\sqrt{x}\cdot\ln(x)}{x-1} \le 1$$

נפריד לשני מקרים

I) $x>1$ $\qquad \sqrt{x}\ln(x) \le x-1$

II) $0<x<1$ $\qquad \sqrt{x}\ln(x) \ge x-1$



בנקודה $x=1$ יש נקודת פיתול.
המשיק בנקודה זו חותך את הגרף
משוואת המשיק היא $x-1$.
ניתן לראות כי האי-שוויונים
מתקיימים.

$$\varphi(x)=\sqrt{x}\ln(x)$$

$$\varphi'(x)=\frac{\ln(x)+2}{2\sqrt{x}}$$

$$\varphi''(x)=\frac{\ln(x)}{4x\sqrt{x}}$$

תרגיל 8: הוכחת אי-השוויון

$$\frac{tg(x)}{x} > 1+\frac{1}{3}x^2$$

עבור

$$0<x<\pi/2$$

פתרון:

$$tg(x) > x+\frac{1}{3}x^3$$

נסמן

$$\varphi(x)=tg(x)-x-\frac{1}{3}x^3$$

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}-1-2x^2$$

נזכר בזהות

$$1+tg^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\varphi'(x)=tg^2(x)-x^2$$

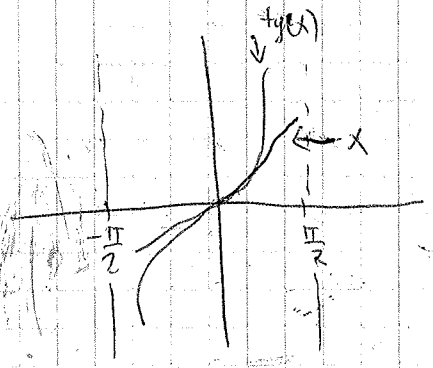
בתחום $0<x<\pi/2$ מתקיים $tg(x)>x$

לכן $\varphi'(x)>0$

מכיוון שהנגזרת גדולה מ-0

ונקודת המינימום היא ב- $x=0$

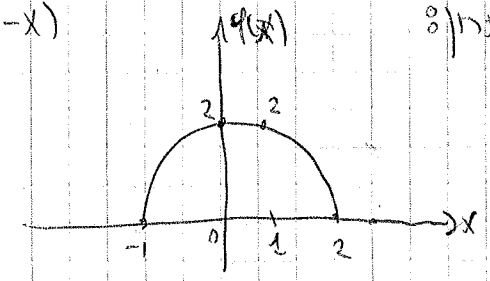
הוא שיוויון מתקיים.



תרגיל 9, סעיף א:

$$\frac{4}{9}(e-1) < \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)(2-x)}\,dx < \frac{1}{2}(e-1)$$

$\varphi(x) = (x+1)(2-x)$ בתרון:



$\varphi(x) = -x^2 - x + 2$

$\varphi'(x) = -2x + 1 \Rightarrow x = 1/2$

$\varphi(x_{max} = 1/2) = 9/4$

$$2 \le (x+1)(2-x) \le 9/4 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{(x+1)(2-x)} \le \frac{4}{9}$$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)(2-x)}\,dx \le \frac{1}{2}\int_0^1 e^x\,dx = \frac{1}{2}(e-1)$$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)(2-x)}\,dx \ge \frac{4}{9}\int_0^1 e^x\,dx = \frac{4}{9}(e-1)$$

סעיף ג: דרך להוכיח

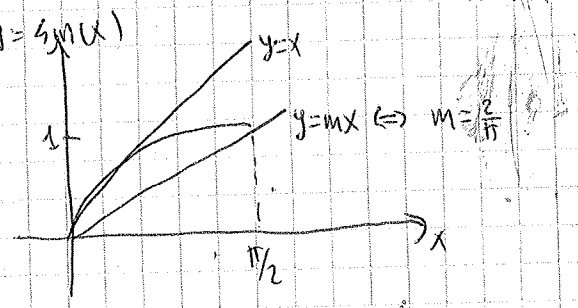
$$\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\pi+2}{2}\right) < \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{x(x+1)}\,dx < \ln\left(\frac{\pi+2}{2}\right)$$

בתרון: הקטע $0 \le x \le \pi/2$

מתקיים $\frac{2}{\pi}x \le \sin(x) \le x$

בתחום הנ"ל $0 \le x \le \pi/2$ הפונקציה $\sin(x)$ קמורה

ונמצאת בין המשיק והמיתר



$$\int_0^{\pi/2} \frac{2/\pi\, x}{x(x+1)}dx \le \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{x(x+1)}dx \le \int_0^{\pi/2} \frac{x}{x(x+1)}dx$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(x+1)}dx \le \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{x(x+1)}dx \le \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(x+1)}dx$$

$$\frac{2}{\pi}\ln(x+1)\Big|_0^{\pi/2} \le \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{x(x+1)}dx \le \ln(x+1)\Big|_0^{\pi/2}$$

סעיף ג: דרוש להוכיח

$$\sin(1) < \int_{-1}^{1} \frac{\cos(x)}{(1+x^2)}dx < 2\sin(1)$$

$$\sin(1) < 2\int_0^{1} \frac{\cos(x)}{(1+x^2)}dx < 2\sin(1)$$

$$\frac{\cos(x)}{2} \le \frac{\cos(x)}{1+x^2} \le \cos(x)$$

$\left(x=1 \text{ שוויון}\right)$ $\left(x=0 \text{ שוויון}\right)$

תרגיל 10: נתון פולינום $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + 1$

הפולינום בעל n שורשים ממשיים, וכל המקדמים חיוביים.

$P_n(\alpha_k) = 0 \quad \forall \alpha_k \in \mathbb{R}, \; a_k > 0$

דרוש להוכיח: $P_n(2) \ge 3^n$

בהתרון: נראה שמתוך כך כל המקדמים חיוביים, השורשים שליליים.

נכתוב את הפולינום $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(x-\alpha_k)$

$-\alpha_k = \beta_k > 0$ (נסמן)

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (x+\beta_k)$$

$$P_n(2) = \prod_{k=1}^{n} (2+\beta_k)$$

$$2+\beta_k = \frac{(1+1+\beta_k)3}{3} = \left[\frac{1+1+\beta_k}{3}\right]\cdot 3 \geq \sqrt[3]{1\cdot 1\cdot \beta_k}\cdot 3 = 3\sqrt[3]{\beta_k}$$

ממוצע חשבוני ממוצע הנדסי

$$P_n(2) = \prod_{k=1}^{n} (2+\beta_k) \geq \prod_{k=1}^{n} 3\sqrt[3]{\beta_k} = 3^n \sqrt[3]{\prod_{k=1}^{n} \beta_k} = 3^n$$

לפי תנאי ויטה
מכפלת השורשים = 1

תרגיל המשך: יש להוכיח כי אם l מספר טבעי חיובי.

$P_n(l) \overset{?}{\geq} (l+1)^n$ יש להוכיח

14.4.13

הרצאה 5

נושאי ההרצאה:

מרחב מטרי, שבועות, מחלקה פתוחה.

תרגילים, כלל המקבילית, נוסחאות פולרמלדה

<u>הגדרה</u>: יהיו $x,y\in V$, $\rho(x,y)$ יקרא מטריקה אם לכל $x,y\in V$ מתקיים:

I) $\rho(x,y)\geq 0$

II) $\rho(x,y)=0 \iff x=y$

III) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$

IV) $\rho(x,y)\leq \rho(x,z)+\rho(z,y) \quad \forall x,y,z\in V$

דוגמא: מעל מרחב נורמי, נגדיר את הנורמה כמטריקה.

$\rho(x,y)=\|x-y\|$

קל לראות כי הדרישות מהמטריקה מתקיימות

1) $\|x-y\|\geq 0$

2) $\|x-y\|=0 \iff x=y$

3) $\|x-y\|=\|y-x\|$

4) $\|x-y\|=\|(x-z)+(z-y)\|\leq\|x-z\|+\|z-y\|$

$\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)$

כמו-כן, שבור מקרה פרטי

$\rho(x,0)=\|x\|$

דוגמא: נתבונן במרחב הסדרות $x=\{a_i\}_{i=1}^{\infty}\in T$

X- סדרה ממשית

T- מרחב טיהונוב (יוגדר בהמשך).

$y=\{b_j\}_{j=1}^{\infty}\in T$

נגדיר את המטריקה

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\left(\frac{|a_k-b_k|}{1+|a_k-b_k|}\right)$$

ברור כי הטור מתכנס כי $\frac{|a_k-b_k|}{1+|a_k-b_k|} \le 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty$$

אך יש להראות כי המטריקה מהולדה אכן מקיימת את ההגדרות:

1) $\rho(x,y) \geq 0$ תמיד לראות

2) $\rho(x,y)=0 \Rightarrow |a_k-b_k|=0 \Rightarrow x=y$

3) $\rho(x,y)=\rho(y,x) \Rightarrow |a_k-b_k|=|b_k-a_k|$

4) נבדוק את אי-שוויון המשולש עבור המטריקה מהולדה

(*) $\frac{|\alpha+\beta|}{1+|\alpha+\beta|} \le \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|} + \frac{|\beta|}{1+|\beta|}$ צריך להוכיח

$x=\{a_k\}$, $y=\{b_k\}$, $z=\{c_k\}$

$\rho(x,y) \le \rho(x,z)+\rho(z,y)$

$\Downarrow$

$$\frac{|a_k-b_k|}{1+|a_k-b_k|} \le \frac{|a_k-c_k|}{1+|a_k-c_k|} + \frac{|c_k-b_k|}{1+|c_k-b_k|}$$

$|a_k-b_k| = |(a_k-c_k)+(c_k-b_k)|$

ולכן, אם נוכיח את (*) אזי נוכיח את אי-שוויון המשולש עבור המטריקה של שיתוניה.

נגדיר פונקציה $\varphi(t) \triangleq \frac{t}{1+t} = \frac{1+t-1}{1+t} = 1-\frac{1}{1+t}$

$\varphi'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$

הנגזרת חיובית, כלומר $\varphi(t)$ פונקציה עולה.

$|\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta|$

נציב ב- $\varphi(t)$ את האי-שוויון לעיל, ונקבל

$\varphi(|\alpha+\beta|) \le \varphi(|\alpha|+|\beta|)$

$$\frac{|\alpha+\beta|}{1+|\alpha+\beta|} \le \frac{|\alpha|+|\beta|}{1+(|\alpha|+|\beta|)} = \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|+|\beta|} + \frac{|\beta|}{1+|\alpha|+|\beta|} \le \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|} + \frac{|\beta|}{1+|\beta|}$$

מסקנה: המטריקה $\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\left(\frac{|a_k-b_k|}{1+|a_k-b_k|}\right)$ של טיחונוף

מהווה מטריקה לפי הגדרה.

הערה: המטריקה שונה מנורמה.

עבור נורמה יש דרישה שיתקיים $\|\alpha x\| = |\alpha|\cdot\|x\|$

$\forall \alpha\in F,\ x\in V$

המטריקה של טיחונוף לא מקיימת את הדרישה הנ"ל של הנורמה.

הגדרה: יהי x_n שייך למרחב מטרי, אומרים שגדר את הגבול של הסדרה

$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon);\ n>N(\varepsilon)\ \rho(x_n,a)<\varepsilon$

הערה: הגבול יחיד.

הוכחה: נניח כי קיימים 2 גבולות a, b

$\rho(a,b)\le \rho(x_n,a)+\rho(x_n,b)\le \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$

לכן $\rho(a,b)=0$

הערה: אם קיים גבול, אזי האיברים בסדרה חסומים.

הוכחה: אם קיים הגבול, דהינו $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

ברור שהוכיח כי $\rho(x_n,0)\le M$

עבור n גדול, $n\ge N$, $\rho(x_n,a)\le\varepsilon$

כלומר, האיברים $x_1,\dots,x_N$ נמצאים בתוך הכדור ברדיוס ε

והאיברים $x_{N+1},\dots$ לא נמצאים בכדור.

ניקח את הערך המכסימלי של הקבוצה הסופית הנ"ל.

הגדרה: סדרת קושי תקרא אם מתקיים התנאי הבא עבור איברי הסדרה.

$\forall \varepsilon>0,\ \exists N;\ m,n>N \Rightarrow \rho(x_m,x_n)<\varepsilon$

סדרה המקיימת את קריטריון קושי, אזי קיים גבול

אם אוק לא ההכרח, הגבול שייך למרחב.

אם הגבול שייך למרחב, אזי נאמר שהמרחב שלם.

דוגמא: נתבונן בקבוצת המספרים הרציונליים

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$$

$$a_n \in \mathbb{Q} \quad , \quad e \notin \mathbb{Q}$$

בדוגמא זו אברי הסדרה a_n מקיימים את הקריטריון קושי; אבל המרחב איננו שלם

וכן הוא לא מכיל את הגבול של הסדרה a_n.

<u>3) תרגילים מספר 4 - מרחבי נורמה, מטריקה.</u>

שאלה 1

א) המרחב מוגדר $V = C[1,4]$

דה"נ, מרחב הפונקציות הרציפות בתחום $[1,4]$

יש למצוא את הנורמה של $x(t)$. $x(t) = 2t^3 - 15t^2 + 36t$

נגדיר את הנורמה

$$\|f\|_C = \max_{a \le t \le b} \{|f(t)|\}$$

נבדוק כי נורמה זו אכן מקיימת את אי-שוויון המשולש.

$$|f(t) + \varphi(t)| \le |f(t)| + |\varphi(t)| \le \max_{a \le t \le b}\{|f(t)|\} + \max_{a \le t \le b}\{|\varphi(t)|\}$$

ולכן $\forall t$ $\max\{|f(t)+\varphi(t)|\} \le \max\{|f(t)|\} + \max\{|\varphi(t)|\}$

אם מדובר בקטע פתוח (a,b) אזי נדבר על $\sup\{\}$ ולא על $\max\{\}$.

נחזור לתרגיל

$$\|x(t)\|_C = \max_{1 \le t \le 4}\{2t^3 - 15t^2 + 36t\}$$

$$\left.\begin{aligned} x(t=1) &= 23 \\ x(t=4) &= 32 \end{aligned}\right\} \text{ הערכים בקצוות}$$

$$x'(t) = 6t^2 - 30t + 36 = 0 \Rightarrow t = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$$

$x(t=2) = 28$

$x(t=3) = 27$

מסקנה: המכסימום מתקבל בנקודה הקיצון

$\max\{x(t)\} = x(t=4) = 32$

ב) המרחב מוגדר $V = L_1[0,1]$

$\varphi(t) \in L_1$ אם $\int_0^1 |\varphi(t)|dt < \infty$

ונגדיר נורמה $\|\varphi(t)\|_{L_1}$ מוגדר לפי $\int_0^1 |\varphi(t)|dt$

L_1 מרחב הפונקציות האינטגרביליות בהחלט בקטע $[0,1]$

$$\int_0^1 |2t-1|dt = \int_0^{1/2}(1-2t)dt + \int_{1/2}^1 (2t-1)dt$$

$$= (t-t^2)\Big|_0^{1/2} + \frac{1/2(2t-1)^2}{4}\Big|_{1/2}^1 = 3/8$$

ג) המרחב מוגדר $V = \mathbb{C}^2$

$\|\varphi \in \mathbb{C}^2\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$ $\quad \varphi = (x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$

$\|(1+2i, 2+3i)\| = [(1+2i)^2 + (2+3i)^2]^{1/2} = [5+13]^{1/2} = \sqrt{18}$

3) המרחב מוגדר $V = \ell^2$

$x_n = \left(\frac{5^n - 3^n}{7^n}\right)_{n=1}^{\infty}$

ℓ^2 הוא מרחב הסדרות המתכנסות, כלומר

$x_n = \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^2$ if $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty$

הנורמה מוגדרת $\|x_n\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2\right]^{1/2}$

$$\|x_n\| = \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5^n - 3^n}{7^n}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{25^n - 30^n + 9^n}{49^n}\right)\right]^{1/2}$$

$$\|x\| = \left[\sum\left(\frac{25}{49}\right)^n + \sum\left(\frac{9}{49}\right)^n - \sum\left(\frac{30}{49}\right)^n\right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{25/49}{1-25/49} + \frac{9/49}{1-9/49} - \frac{30/49}{1-30/49}\right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{25}{24} + \frac{9}{40} + \frac{30}{19}\right]^{1/2}$$

ג) הערכה מעל $V = C[0,\pi]$

$x(t) = \sin^2(t)$

$$\|x(t)\| = \max_{0<t<\pi}\{x(t) = \sin^2(t)\} = 1$$

ד) הערכה מעל $V = L^2[0,1]$

$x(t) = e^t - 2\sin(t)$

$x \in L^2[a,b]$ אם מתקיים $\int_a^b |x(t)|^2 dt < \infty$

$$\|x\| = \left[\int_0^1 |x(t)|^2 dt\right]^{1/2} = \left[\int_0^1 [e^t - 2\sin(t)]^2 dt\right]^{1/2}$$

$$= \left[\int_0^1 [e^{2t} - 4e^t\sin(t) + 4\sin^2(t)]\, dt\right]^{1/2}$$

$$= \frac{e^{2t}}{2}\Big|_0^1 + 4\int_0^1 e^t\sin(t)dt + 4\int_0^1 \frac{1-\cos(2t)}{2}\, dt$$

$$\int_0^1 e^t\sin(t)dt \Rightarrow \begin{cases} u = e^t & du = e^t dt \\ v = \sin(t) & dv = \cos(t) \end{cases}$$

$$\int_0^1 e^t\sin(t)dt = -e^t\cos(t)\Big|_0^1 + \int_0^1 e^t\cos(t)\, dt$$

$$2\int_0^1 e^t\sin(t)dt = 1 - e\cos(1) + e\sin(1)$$

$$\int_0^1 e^t\sin(t)dt = \frac{1 + e(\sin(1) - \cos(1))}{2}$$

$$\|x\|^2 = \frac{e^2-1}{2} + 2\left[1 - \frac{\sin(2)}{2}\right] + \frac{1-e[\sin(1)-\cos(1)]}{2}$$

שאלה 2: יש למצוא את המרחק בין נקודות x, y במרחבים המטריים V:

א) $V = \mathbb{C}^2$

$$x = (2+3i, 3+2i), \quad y(3i-1, 3i-1)$$

$$\rho(x,y) = \left[(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2\right]^{1/2}$$

$$= \left[3^2 + (i-4)^2\right]^{1/2} = \sqrt{26}$$

ב) $V = C_{[0,1]}$

$$x(t) = 16t^3 + 48t$$

$$y(t) = 60t^2 + 11$$

$$\rho(x,y) = \max_{0\le t\le 1}\{|x(t)-y(t)|\} = \max_{0\le t\le 1}\{\varphi(t)\}$$

$$= \max_{0\le t\le 1}\{|16t^3 + 48t - 60t^2 - 11|\}$$

$$|\varphi(t=0)| = |-11| = 11$$

$$|\varphi(t=1)| =$$

ג) $V = \ell^1$

$$x_n = \left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad y_n = \left\{\frac{n}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$$

הרצאה 7

28.7.13

מרחבי הילברט - תרגילים

דטרמיננטה של גרם-שמידט

אורתוגונליות עם המשקל

הצגת מונומים של פולינומים עם משקל.

<u>המשך של תרגילים מטבר 4.</u>

טאולה 2, סעיף ג'

יש למצוא את המרחק בין נקודות x, y במרחב מטרי V.

$$V = \ell^1 \quad , \quad x = \left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty} \qquad y = \left\{\frac{n}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$x \in \ell^1 \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} < \infty$$

כמו-כן $y \in \ell^1$

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{2^n} - \frac{n}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2^n}$$

עבור $|t|<1$

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n = \frac{t}{1-t}$$

$$\frac{dS(t)}{dt} = \frac{1-t+t}{(1-t)^2} = (1-t)^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1}$$

$$\frac{d^2S(t)}{dt^2} = \frac{2}{(1-t)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) t^{n-2}$$

$$S''(t=1/2) = \sum \frac{n(n-1)}{2^{n-2}}$$

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2^n} = \frac{1}{4} S''(t)\Big|_{t=1/2} = \frac{1}{4} \sum n(n-1) t^{n-2}\Big|_{t=1/2} = \frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3}\Big|_{t=1/2} = 4$$

שאלה 3: אילו מבין הפונקציות הבאות מגדירים מטריקה במרחב $\mathbb{R}^3$

מעל שדה המספרים המרוכבים

$$\rho(u_1, u_2) = (a_1 - b_1)^3 + (a_2 - b_2)^3 + (a_3 - b_3)^3 \quad \text{לא}$$

לא מטריקה כי ניתן להקל עליה אלים.

ב) $\rho(M_1, M_2) = \left[(a_1 - 2a_2)^3 + (b_1 - 3b_2)^2 + (c_1 - 4c_2)^2 \right]^{1/2}$

זו ההכרחת מטריקה, יכול לקבל ערך שלילי.

ג) $\rho(M_1, M_2) = \left[|a_1 - a_2|^{1/2} + |b_1 - b_2|^{1/2} + |c_1 - c_2|^{1/2} \right]^2$

נתבונן ב-3 נקודות

$$\begin{cases} M_1 = (0,0,0) \\ M_2 = (1,1,1) \\ M_3 = (1,1,0) \end{cases}$$

$\rho(M_1, M_2) = 9$

$\rho(M_1, M_3) = 4$

$\rho(M_3, M_2) = 1$

קיבלנו "משולש" 

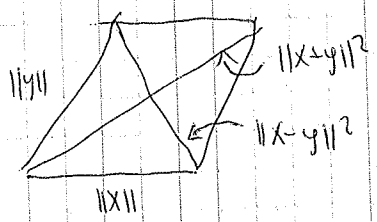
, כלומר, המרחק המוגדר אינו מטריקה שכן אינו מקיים את אי-שוויון המשולש.

ד) $\rho(M_1, M_2) = |a_1 - a_2|$

זו מטריקה.

<u>הגדרה</u>: מרחב מכפלה פנימית, שהנורמה המושרית מהמכפלה הפנימית. כמו-כן ניתן להגדיר את המכפלה הפנימית בעזרת הנורמה. (תנאי המקבילית), והמרחב שלם. יקרא <u>מרחב הילברט</u>.

מטפל ניסרק טוען שאת תנאי המקבילית מתקיים אמ"ו יש מכפלה פנימית.



$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

<u>מרחב שלם</u>: מרחב בו כל סדרת קושי מתכנסת תחת המטריקה (אולם המטריקה היא הנורמה). והגבול שייך למרחב.

דוגמא: L^2 [a,b] אינו מרחב הילברט

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f\cdot\bar{g}\,dx$$

$$f\in L^2 \Rightarrow \int_a^b \|f\|^2\,dx < \infty$$

הערה: כל מרחבי הילברט בעלי אותו מימד איזומורפים, ואיזומטרית.

לכן כל מרחב הילברט ספרבילי.

<u>משפט פישר-ריס</u>: אם נתונה סדרה $\{c_n\}$, כך ש- $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|<\infty$

אזי קיימת פונקציה $f(x)$ כך ש- $\|f(x)\|<\infty$

כך שהסדרה c_n תהווה מקדמי פורייה ל- $f(x)$

דהינו יתקיים $c_n = \langle f(x), u_n(x)\rangle$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x)$$

$$\|f(x)\| = \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 \qquad \text{(פרסבל)}$$

$u_n(x)$ - מערכת אורתונורמלית.

במילים אחרות, משפט פישר-ריס טוען:

$$\forall x\in \ell^2 \quad \exists f\in L^2 \quad ; \quad \forall f\in L^2 \quad \exists x\in \ell^2$$

איזומורפי - לכל איבר במרחב אחד, קיים איבר במרחב השני

איזומטרי - הנורמה של כל האיברים שווה. (פרסבל).

<u>בלי תרגילים 4 - מרחב הילברט</u>

טענה 1: הוכח האם במרחב הילברט הטענות שקולות. (מרחב ממש, מרוכב).

אם $x\perp y$

אז $\|x-y\| = \|x+y\|$

האם טענה א', ב' שקולות?

$$\begin{cases} \|x+y\| = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re\{\langle x,y\rangle\} \\ \|x-y\| = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,-y\rangle + \langle -y,x\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2Re\{\langle x,y\rangle\} \end{cases}$$

$$Re\{\langle x,y\rangle\} = 0$$

טענה ב' גורר $x\perp y$ כך במרחב ממש. טענה א' תמיד גורר את ב'.

אם $\|x+iy\| = \|x-iy\|$

$$\begin{cases} \|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Im}\{\langle x,y\rangle\} \\ \|x-iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,\mathrm{Im}\{\langle x,y\rangle\} \end{cases}$$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\{\langle x,y\rangle\} = 0$

סעיף ב' שגורר את סעיף א' ~~[illegible]~~

סעיף א' גורר את סעיף ב'.

שאלה ב': האם אפשר להגדיר מכפלה פנימית במרחב נורמי $L_p[0,1]$ $1 \le p < \infty$ כך שמרחב יהיה מרחב הילברט?

פתרון:

$x(t) \in L_p[0,1]$

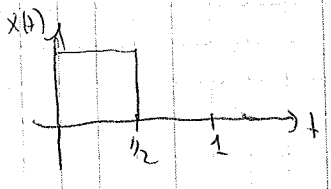
$$x(t) \in L_p \Rightarrow \int_0^1 |x(t)|^p\,dt < \infty$$

$$\|x(t)\| = \left[\int_0^1 |x(t)|^p\,dt\right]^{1/p}$$

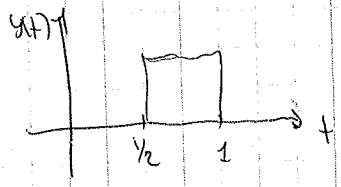
השאלה האם מתקיים תנאי המקבילית. (נכנסו תנאי הערך של p).

נביט בדוגמא נגדית

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 1/2 \\ 0 & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$



$$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le 1/2 \\ 1 & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$



האם מתקיים, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \overset{?}{=} 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

$$\|x\| = \left(\int_0^{1/2} 1^p\,dt\right)^{1/p} = \left(t\Big|_0^{1/2}\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} = 2^{-1/p}$$

$$\|y\| = \left(\int_{1/2}^{1} 1^p\,dt\right)^{1/p} = \left(t\Big|_{1/2}^{1}\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} = 2^{-1/p}$$

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 = \left(2^{-1/p}\right)^2 = 2^{-2/p}$$

$$2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = 2^{-2/p} + 2$$

$$\|x+y\| = \left(\int_0^1 1^p\,dt\right)^{1/p} = 1$$

$$\|x-y\| = 1$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 1+1 = 2$$

$$2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = \|x+y\| + \|x-y\|$$

$$2^{-2/p+2} = 2^1$$

$$-\frac{2}{p} + 2 = 1$$ כלומר, נדרש

$$p = 2$$

<u>מסקנה</u>: רק עבור $p=2$ מתקיים תנאי המקבילית, ולכן רק עבור $p=2$ המרחב הוא מרחב הילברט.

עבור $p\neq 2$ לא ניתן לאמוד מכפלה פנימית בצורה נורמה.

טענה 3: הוכח/י שאי אפשר להגדיר מכפלה פנימית במרחב נורמי $C[0,1]$ כך שהמרחב יהיה מרחב הילברט.

הוכחה: הטענה הוכחה בהרצאה עבור המרחב

$$x(t) \in C[0,1] \Rightarrow \|x(t)\| = \max_{0\le t\le 1}\{x(t)\}$$

מקיימת את תנאי המקבילית?

נביט בדוגמא הבאה

$$\begin{cases} x(t) = \sin(\frac{1}{2}\pi t) \\ y(t) = \cos(\frac{1}{2}\pi t) \end{cases} \quad 0\le t\le 1$$

$$\|x(t)\| = \|y(t)\| = \max\{\ \} = 1$$

$$\|x+y\| = \max_{0\le t\le 1}\{x(t)+y(t)\} = \sqrt{2}$$ (נקודת המקסימום על הברכיים)

$$\|x-y\| = 1$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

$$(\sqrt{2})^2 + 1 = 2(1+1)$$

$$3 \neq 4$$

לא מתקיים תנאי המקבילית.

שאלה 4: האם המערכת $\{z_n(t) = \sin(2nt) + \cos(2nt)\}_{n=1}^{\infty}$ במרחב $L_2[0,\pi]$

הינה: א) אורתוגונלית

ב) אורתונורמלית

ג) שלמה

פתרון: המערכת כן אורתוגונלית ולכן אורתונורמלית.

כדי מבחן השלמות, פירושו כי לא ניתן למצוא פונקציה נורמה שאינה אפס שאינה תלה מהמערכת, ואשר אורתוגונלית למערכת.

נתבונן בפונקציה הקבועה 1 בתחום $[0,\pi]$

$$\langle 1, \sin(2nt)\rangle = \int_0^{\pi} 1\cdot\sin(2nt)\,dt = -\tfrac{1}{2n}\cos(2nt)\Big|_0^{\pi} = 0$$

$$\langle 1, \cos(2nt)\rangle = 0$$

מסקנה: המערכת איננה שלמה.

שאלה 5: האם הפונקציות הבאות מהוות מטריקות במרחב $\mathbb{R}$?

א) $\rho(x,y) = \operatorname{arctg}|x-y|$

נבדוק קיום אי-שוויון המשולש

$$\operatorname{arctg}(\alpha+\beta) \overset{?}{\le} \operatorname{arctg}(\alpha) + \operatorname{arctg}(\beta)$$

נסמן את הפונקציה

$$\varphi(\alpha,\beta) = \operatorname{arctg}(\alpha) + \operatorname{arctg}(\beta) - \operatorname{arctg}(\alpha+\beta)$$

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{1}{1+\alpha^2} - \frac{1}{1+(\alpha+\beta)^2} \ge 0 \qquad \varphi'_\alpha > 0$$

$$0 = \varphi(0,\beta) \le \varphi(\alpha,\beta)$$

$$\rho(x,y) = \operatorname{arctg}|x-y|$$

$$\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$$

נסמן

$$\alpha = |x-y| \quad , \beta = |y-z|$$

$$\alpha+\beta = |x-z| = |x-y| + |y-z|$$

הרצאה
15.5.13

המשך תרגילים

דטרמינטה של גרם-שמידט

תהליך אורתוגונליזציה

קירוב טוב ביותר במובן

הצגת ממדים של פולינומים אורתוגונליים

אורתוגונליות עם משקל.

על תרגילים מספר 4 - מרחב הילברט

טאלה 5, סעיף ב'

הוכח הפונקציה מהווה מטריקה במרחב $\mathbb{R}$

$\rho(x,y) = \sqrt{|x-y|}$

נרצה להוכיח את אי-שוויון המשולש

$\sqrt{\alpha+\beta} \le \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

$\varphi(\alpha,\beta) = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha+\beta}$

$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{2\sqrt{\alpha+\beta}} \ge 0$ $\quad \varphi(\alpha) \uparrow$

$\varphi(0, \ ) = 0$

$x-y = (x-z) + (z-y)$

$\alpha = (x+z) \quad , \quad \beta = (z-y)$

מסקנה: המטריקה מקיימת את אי-שוויון המשולש.

סעיף ג'

לא מהווה מטריקה, כי קיימות $x,y \neq 0$ כך שהמטריקה מתאפסת

למשל $x=0, \ y=\pi$

סעיף ד'

$\rho(x,y) = |e^x - e^y|$

$= |e^x - e^z + e^z - e^y|$

$\le |e^x - e^z| + |e^z - e^y|$

מקיים את אי-שוויון המשולש, ולכן מטריקה.

פונ' ה:

$$\rho(x,y) = |x^3 - y^3| = |(x^3 - z^3) + (z^3 - y^3)| \le |x^3 - z^3| + |z^3 - y^3|$$

שאלה 8

הוכח כי במרחב הילברט מתקיים

I) $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2Re\{\langle u,v\rangle\}$

II) $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2Re\{\langle u,v\rangle\}$

III) $\|u+iv\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2Im\{\langle u,v\rangle\}$

IV) $\|u-iv\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2Im\{\langle u,v\rangle\}$

$$I - II \Rightarrow \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4Re\{\langle u,v\rangle\} \qquad (*)$$

$$III - IV \Rightarrow \|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2 = 4Im\{\langle u,v\rangle\} \quad /\cdot i$$

$$i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2 = 4\cdot i\cdot Im\{\langle u,v\rangle\} \qquad (**)$$

$$(*) + (**) \Rightarrow \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2 = 4\langle u,v\rangle$$

ומהקלים:

$$\langle u,v\rangle = 1/4\left[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2\right]$$

נוסחת זו נקראת <u>נוסחת הפולריזציה</u>

ביטוי של מכפלה פנימית באמצעות הנורמה.

אנחנו הוכחנו כך אותך, הנחנו מכפלה פנימית וקבלנו את אגף ימין.

אם נתון הביטוי של אגף ימין, ונרצה להוכיח את קיום הכללים

של מכפלה פנימית, אזי נדרש לבדוק המקבילות בשביל לעמוד

בכל הדרישות של מכפלה פנימית.

שאלה 9: האם אפשר להגדיר מכפלה פנימית במרחב l^p $p \ge 1$

כדי שהמרחב יהיה הילברט?

פתרון:

$x \in l^p$

$x = \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p < \infty$

$\|x\| = \left(\sum_1 |a_i|^p\right)^{1/p}$

נרצה לבדוק את תנאי המקבילית מתקיים.

ניתן דוגמא נגדית, נקח x, y

$x = \{1, 1, 0, 0, \dots\}$

$y = \{1, -1, 0, \dots\}$

$\|x\| = \|y\| = 2^{1/p}$

$\|x\| = (|1|^p + |1|^p)^{1/p} = 2^{1/p}$

$\|x\|^2 = \|y\|^2 = 2^{2/p}$

$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2^{2/p+1}$

$\|x+y\| = 2$

$\|x-y\| = 2$

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 4 + 4 = 8 = 2^3$

נבדוק אם קיים השוויון (תנאי המקבילית).

$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \overset{?}{=} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$

$2^{2/p+1} = 2^3$

$\frac{2}{p} + 1 = 3$

$2/p = 1 \Rightarrow \boxed{p = 2}$

מסקנה סופית אמור $p=2$ מתקיים תנאי המקבילית

(אמור הדוגמא שהתרגנו).

<u>פולינומים של גרם-שמידט</u>

נתונה מערכת $\{u_i\}$ בלתי-תלויה, נגדיר מכפלה פנימית $\langle \cdot, \cdot \rangle$

מהמינימום שהמערכת בתלם, אזי כל צירוף לינארי

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0$

אזי $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

נכפיל את המשוואות הדרושות הלינאריות במכפלה פנימית ב- u_1.

$$\alpha_1\langle u_1,u_1\rangle+\alpha_2\langle u_1,u_2\rangle+\dots+\alpha_n\langle u_1,u_n\rangle=0$$

באופן דומה נכפיל ב- u_2 עד u_n ונקבל.

$$\alpha_1\langle u_2,u_1\rangle+\alpha_2\langle u_2,u_2\rangle+\dots+\alpha_n\langle u_2,u_n\rangle=0$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1\langle u_n,u_1\rangle+\alpha_2\langle u_n,u_1\rangle+\dots+\alpha_n\langle u_n,u_n\rangle=0$$

בגלל שהמערכת $\{u_i\}$ לא תלויה, אזי המשוואות לא תלויות.

נמצא פתרון שונה מהפתרון הטריוויאלי. דהיינו $\Delta_n\neq 0$

נרשום את הדטרמינטה בעזרת פונקציונלים

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle & \langle\varphi_1,\varphi_2\rangle & \langle\varphi_1,\varphi_n\rangle\\ \langle\varphi_2,\varphi_1\rangle & \langle\varphi_2,\varphi_2\rangle & \langle\varphi_2,\varphi_n\rangle\\ \vdots & & \\ \langle\varphi_n,\varphi_1\rangle & \langle\varphi_n,\varphi_2\rangle & \langle\varphi_n,\varphi_n\rangle\end{vmatrix}$$

קיבלנו דטרמינטה הנקראת דטרמינטה של גרם-שמידט.

נסמן ~~[illegible]~~ ב- $Q_n(x)$

$$Q_n(x)=\begin{vmatrix}\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle & \langle\varphi_1,\varphi_2\rangle & \dots & \langle\varphi_1,\varphi_{n-1}\rangle & \varphi_1\\ \langle\varphi_2,\varphi_1\rangle & \langle\varphi_2,\varphi_2\rangle & \dots & \langle\varphi_2,\varphi_{n-1}\rangle & \varphi_2\\ \vdots & & & & \\ \langle\varphi_n,\varphi_1\rangle & \langle\varphi_n,\varphi_2\rangle & \dots & \langle\varphi_n,\varphi_{n-1}\rangle & \varphi_n\end{vmatrix}$$

נרשום את המכפלה הפנימית

$$\langle Q_n(x),\varphi_k(x)\rangle \qquad k=1,2,\dots,n$$

מכפלת דטרמינטה בפונקציה, פירושה הכפלת שורה ל סמוכה ואחת באותה הפונקציה.

$$\langle Q_n(x), \varphi_k(x) \rangle = \begin{cases} 0 & k<n \\ \delta_n \neq 0 & k=n \end{cases}$$

את $k<n$ נקבל דטרמיננטה עם 2 שורות זהות, ולכן 0.

נכתב את $Q_n(x)$

$$Q_n(x) = \varphi_n \cdot \Delta_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \varphi_k$$

נתבונן במכפלה הסקלרית

$$\langle Q_n(x), Q_n(x) \rangle = \delta_n \cdot \delta_{n-1}$$

$$\langle Q_n(x), Q_n(x) \rangle = \|Q_n(x)\|^2 \geq 0$$

$$\langle Q_n(x), \varphi_n \delta_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \varphi_k \rangle = \Delta_{n-1} \underbrace{\langle Q_n(x), \varphi_n \rangle}_{\delta_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \underbrace{\langle Q_n(x), \varphi_k \rangle}_{0}$$

$$\delta_{n-1} \cdot \delta_n = \|Q_n(x)\|^2$$

מערכת $\{Q_n(x)\}$ הינה מערכת אורתוגונלית

$$\langle Q_n(x), Q_k(x) \rangle = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ \|Q_n(x)\|^2 & k=n \end{cases}$$

ננרמל את המערכת, פי חלוקה ב- $\|Q_n(x)\|^2$

נסמן את הוקטור המנורמל ב- $\hat{Q}_n(x)$

$$\hat{Q}_n(x) = \frac{Q_n(x)}{\|Q_n(x)\|} = \frac{1}{\sqrt{\delta_n \delta_{n-1}}} Q_n(x)$$

$$\hat{Q}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta_n \delta_{n-1}}} \begin{vmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_1, \varphi_{n-1} \rangle & \varphi_1 \\ \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle & & \langle \varphi_2, \varphi_{n-1} \rangle & \varphi_2 \\ \vdots & & & \\ \langle \varphi_n, \varphi_1 \rangle & & \langle \varphi_n, \varphi_{n-1} \rangle & \varphi_n \end{vmatrix}$$

δ_1 שווה ל- $\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle$ ולכן חיובי.

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \\ \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle \end{vmatrix} > 0$$

לפי משפט קושי-שוורץ.

והאינדיקציה δ_n גם גדולה מ-0.

מכיוון שמסדרת הנורמים הריבועיים חיובית,

המטריצה δ_n חיובית מוגדרת.

<u>מכפלה פנימית עם משקל.</u>

<u>הגדרה</u>: נאמר שפונקציה $P(x)$ על הקטע $[a,b]$ היא פונקציית משקל אם:

I) $P(x) \geq 0$

II) $\int_a^b P(x)\,dx > 0$

עבור $(-\infty, \infty)$ מתוספת עוד תנאי

III) $\int_{-\infty}^{\infty} P(x)|x|^n\,dx < \infty$

הגדרנו $\mu_n = \int_a^b P(x)\,x^n\,dx$

יקרא <u>המומנט ה-n של $P(x)$</u>.

הערה: אם עבור תנאי II האינטגרל שווה 1, אזי $P(x)$ יתנהג כהתפלגות פונקציית הסתברות.

כאשר נתבונן במערכת $\{\varphi_i\}$ כך $\{\varphi_i\} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

ונתבונן במרחב $L^2[a,b]$ (המרחב הפונקציות הריבועיות תחת L^2).

$\|x\| = \sup\{x\}$

$\langle x, y \rangle = \int_a^b x^i y^j\,dx$

נבנה את המערכת המטריצה / דטרמינטה שהגדרנו עליה.

$$\hat{P}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \begin{vmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,x\rangle & \cdots & \langle 1,x^{n-1}\rangle & 1 \\ \langle x,1\rangle & \langle x,x\rangle & \cdots & \langle x,x^{n-1}\rangle & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle x^n,1\rangle & \langle x^n,x\rangle & \cdots & \langle x^n,x^{n-1}\rangle & x^n \end{vmatrix}$$

$$\hat{P}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}$$

$\hat{P}_n(x)$ מהווה הלבה של פולינום מונרמל מסדר n.

המטריצה $\{\hat{P}_n(x)\}$ מהוה מערכת אורתונורמלית.

בדרך קצרה להוכיח בסולם בילוש הנלל מספר מערכות שם יתר מ-6 אברים נלתי-תלויים במערכת הראשונית.

מערכות פולינומים אורתוגונליים ידועות.

הערה	$P_n(x)$	משקל $\rho(x)$	קטע	שם	
	$P_n(x)$	1	$[-1,1]$	Legandre	לגנדר
1 סיב	$T_n(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1,1]$	Thebyshev	צבישב
2 סיב	$U_n(x)$	$\sqrt{1-x^2}$	$[-1,1]$		צבישב
3 סיב	$V_n(x)$	$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$	$[-1,1]$		=
4 סיב	$W_n(x)$	$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	$[-1,1]$		=
$\alpha,\beta > -1$	$J_n(\alpha,\beta)(x)$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$[-1,1]$	Jacoby	יעקובי

הפולינומים של לז'נדר וצ'בישב הינם מקרים פרטיים של
הפולינומים של יאקובי.
הדרישה $\alpha, \beta > (-1)$ בטבלה שימתית
(אינטגרביליות) $\int_{-1}^{1} P(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx < \infty$

שם	קטע	המשקל $P(x)$	$P_n(x)$	הערה
Hermit	$(-\infty,\infty)$	e^{-x^2}	$H_n(x)$	
Laguerre לגר	$(0,+\infty)$	$e^{-x}e^{\alpha}$	$L_n^{\alpha}(x)$	$\alpha \geq 0$
Berinstein-Szego ברנשטיין-סגו	$[-1,1]$	$\frac{W_k(x)}{\varphi_k(x)}$		$0 \leq \varphi_k(x)$
				$W_k(x)$ את ה מהמשקלים של צ'בישב

תרגיל: מצא את הפונקציה המשקל $P(x) = \frac{1}{(1-kx^2)^{1/2}}$

בקטע $[-1,1]$ $\quad 0 \leq k \leq 1$

עבור $k=0$ נקבל את לז'נדר

עבור $k=1$ נקבל את צ'בישב

הרצאה 3
12.5.13

תהליך אורתוגונליזציה

קירוב טוב ביותר במובן

משפטי שמירת אורתוגונליות

שני עקרונות של פולינומים אורתוגונליים

קיום ויחידות של פולינומים אורתוגונליים

תהליך גרם-שמידט

נתונה מערכת מכפלה פנימית V ואם איברים $\{u_i\}$ בת"ת.
נתאר את תהליך של בניית מערכת $\{w\}$ תה"א אורתונורמלית.

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ w_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2 = u_2 - \langle u_2, w_1 \rangle w_1 \\ w_2 = \dfrac{v_2}{\|v_2\|} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} v_n = u_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle u_n, w_k \rangle w_k = u_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle u_n, w_k \rangle w_k \\ w_n = \dfrac{v_n}{\|v_n\|} \end{cases}$$

ה-span של $\{w_i\}$ שווה ל-span של $\{u_i\}$, אבל בעזרת קיבלנו מערכת אורתונורמלית $\{w\}$.

תהליך גרם-שמידט הינו יותר נוח לתיאוריה, והבניית מערכת אורתונורמלית מאוחר מימוש בדטרמינטת גרם-שמידט.

הקירוב הטוב ביותר

הגדרה: נתונה מערכת $\{v_n\}$ אורתונורמלית המורחבת במכפלה פנימית V.

$$\langle v_n, v_k \rangle = \delta_{nk} = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

נ"ל לחשב את השגיאה $\|f - \sum_{k=1}^{n} a_k v_k\|$ כאשר $f \in V$, $a_k \in F$ (הפרה)

נסמן $c_k \triangleq \langle f, v_k \rangle$.

אנחנו נרצה $\underset{\forall a_k}{\arg\min} \left\{ \| f - \sum_{k=1}^{n} a_k v_k \|^2 \right\}$

והמטלה מתקיים a_k ?

$$\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k v_k \|^2 = \langle f - \sum_{k=1}^{n} a_k v_k , f - \sum_{k=1}^{n} a_k v_k \rangle$$

$$= \langle f, f \rangle - \langle \sum_{k=1}^{n} a_k v_k , f \rangle - \langle f, \sum_{k=1}^{n} a_k v_k \rangle + \langle \sum_{k=1}^{n} a_k v_k , \sum_{k=1}^{n} a_k v_k \rangle$$

$$= \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k \langle v_k, f \rangle - \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k \langle f, v_k \rangle + \sum_{m} \sum_{k} a_k \bar{a}_m \langle v_k, v_m \rangle$$

$$= \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{\langle f, v_k \rangle} - \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k \langle f, v_k \rangle + \sum_{m} \sum_{k} a_k \bar{a}_m \langle v_k, v_m \rangle$$

$$= \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k \bar{c}_k - \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k c_k + \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$$

$$= \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \bar{c}_k + \bar{a}_k c_k \right) + \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$$

תרגיל - עזר

$$\begin{cases} |a_k - c_k|^2 = (a_k - c_k)(\bar{a}_k - \bar{c}_k) \\ \qquad = |a_k|^2 + |c_k|^2 - (a_k \bar{c}_k + \bar{a}_k c_k) \\ |a_k - c_k|^2 - |a_k|^2 - |c_k|^2 = -(a_k \bar{c}_k + \bar{a}_k c_k) \end{cases}$$

נקבל

$$\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k v_k \|^2 = \| f \|^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(|a_k - c_k|^2 - |a_k|^2 - |c_k|^2 \right) + \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$$

$$\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k v_k \|^2 = \| f \|^2 + \sum_{k=1}^{n} |a_k - c_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$$

מתקבל מינימום כאשר $a_k = c_k$, ונקבל כי השגיאה שווה

$$\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k v_k \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$$

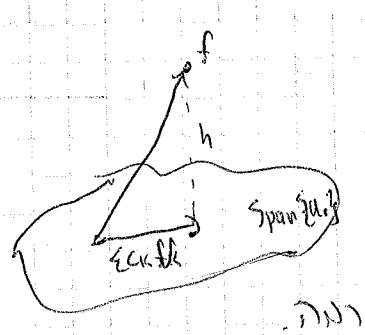
קיבלנו תוצאה של משפט פיתאגורס המורחבת

מהקבע פורייה $c_k = \langle f, v_k \rangle$ נותן את

הקירוב הטוב ביותר במובן, כלומר

את השגיאה המינימלית.

הסיבה שאנו אומרים במובן כי הדבר תלוי בנורמה.



נקבל מהתוצאה כי $\forall n$ $\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \le \|f\|^2$

ובגבול שהולך מתכנס, מתקיים $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \le \|f\|^2$

האי-שוויון האחרון, נקרא אי-שוויון בסל.

השוויון המתקבל נקרא שוויון פרסבל. (Parseval)

ומתקבל שוויון כאשר המערכת (מרחב) שלמים.

ומהאפיון שהלוך מתכנס נובע, כי

$\forall n \quad \lim_{n\to\infty} c_n = 0$

<u>הגדרה</u>: אם מתקיים כי קיים M כך ש- $\left|\frac{x_n}{y_n}\right| \le M$

אז נאמר כי $x_n = O(y_n)$ (Order of y_n)

כמו-כן מתקיים $|x_n| \le M|y_n|$

$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$

הסימון הומצא ע"י אדמונד לנדאו. (יהודי גרמני)

סימון נוסף $\sim$ שבדרגה קרובה אסימפטוטי

למשל עבור נוסחת סטרלינג $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} = 1$$

<u>בסיס שלמות למערכות אורתונורמליות.</u> -

I) סגירות $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \quad \forall f \in H \qquad c_k = \langle f, v_k \rangle$

II) הלבה $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k \qquad \langle v_k, v_m \rangle = \delta_{km} = \begin{cases} 1 & k=m \\ 0 & k\ne m \end{cases}$

III) צפוף $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha_k \ ; \ \forall f \quad \|f - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k v_k\| < \varepsilon$

IV) שלמות $\nexists f \ne 0 \ ; \ \forall c_k = 0$

לא קיים איבר שונה מ-0 המאונך לכל המערכת.

יחידות V) $\left.\begin{array}{l} f \sim \{a_k\} \\ \varphi \sim \{a_k\} \end{array}\right\} \Rightarrow f = \varphi$

הלוכר של סדרת VI) $f \sim \{a_k\}$ הלגת f ע"י $\{a_k\}$

$\varphi \sim \{b_k\}$ הלגת φ ע"י $\{b_k\}$

$\langle f, \varphi \rangle = \sum a_k \overline{b_k}$

<u>משפט:</u>

מערכת אורתונורמלית שמה אם המערכת מקיימת

I או II או III או IV או V או VI. (כולם שקולים)

הוכחה: נשתמש מאוד שקלות, שהו הוכחו כאן.

הוכחה: האם I שקול ל- II?

נתון ל- II, $\forall f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k$

כלומר $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k v_k = f$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ מספר n ; $\| \sum_{k=1}^{n} c_k v_k - f \| < \varepsilon$

נעלה בריבוע $\| \sum_{k=1}^{n} c_k v_k - f \|^2 < \varepsilon$

ולפי הקירוב הטוב ביותר במתמטיקה

$$\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k v_k \|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$$

וקיבלנו את המשפט I.

נסביר את המעבר בין II ל- III (אם מתקיים III - קביעות)

$\forall \| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \|^2 < \varepsilon$

אם קיימת הלגה, אזי

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ מספר n ; $\| \sum_{k=1}^{n} c_k v_k - f \|^2 < \varepsilon$

אם m (של הלגה) גדול מ- n (של הלגה) אזי ניתן להוסיף אפסים.

$\sum \alpha_k v_k + 0 \cdot v_{k+1} + \dots$

אם נתלבש את α_k ב-c_k אזי הוכחנו כי המרחק קטן יותר, כלומר

$$\|f-\sum_{k=1}^{n} c_k v_k\|^2 \le \|f-\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k\|^2 < \varepsilon^2$$

סתור $\alpha_k = c_k$ $\forall k$ נקבל סיום

סתירות בין IV ל- II

נניח כי ניתן לפרק כל f $\quad f = \sum c_k v_k$

ונניח כי $\varphi \neq 0$ המאונך לכל המערכת

אם מתקיים $\varphi = \sum c_k v_k$

$v_k \perp \varphi$ $\quad \langle \varphi, \varphi \rangle = \langle \sum c_k v_k, \varphi \rangle = 0$

נקבל $\quad \|\varphi\|^2 = 0$

כלומר $\quad \varphi = 0$

19.5.13

הרצאה 10

I) שלימות מערכות אורתו-נורמליות

II) שני עקרונות של פולינומים אורתוגונליים.

III) תכונות סימטריות

IV) יחידות מערכות

V) שיוון תלת-נסיגה

נתונה מערכת אורתו-נורמלית $\{P_n(x)\}$ בקטע $[a,b]$ $f \in L^2_{P(x)}[a,b]$

כאשר $L^2[a,b]$ אוסף הפונקציות הרציפות (חוות c)

עם מכפלה פנימית / נורמה של L^2

בקטע $[a,b]$ עם פונקציית משקל $P(x)$

$$\langle P_k(x), P_m(x)\rangle = \delta_{km} = \begin{cases} 1 & k=m \\ 0 & k\neq m \end{cases}$$

שאלה: המערכת יש שלמה

הוכחה: $\forall f(x) \in C[a,b]$

לפי משפט ויירשטרס קיים פולינום $P_n(x)$ כך שמתקיים

$\forall \varepsilon>0$ & $\forall x$ $\exists P_n(x)$; $|f(x)-P_n(x)|<\varepsilon$

$\forall x$ $\max\limits_{a\le x\le b}\{|f(x)-P_n(x)|\}<\varepsilon$ התכנסות במידה שווה

נחשב את הנורמה של השגיאה

$$\|f(x)-P_n(x)\|^2 = \int_a^b P(x)\,|f(x)-P_n(x)|^2\,dx$$

כל פולינום ניתן להצגה ע"י פולינומים אורתוגונליים עם מקדמי פוריה

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{N} C_k \hat{P}_n(x)$$

מקדמי פוריה מגדירים את הקלה $C_k = \langle P_n(x), P_k(x)\rangle$

$$\int_a^b P(x)\,|f(x)-P_n(x)|^2\,dx = \int_a^b P(x)\,\Big|f(x)-\sum_{k=1}^{N} C_k \hat{P}_n(x)\Big|^2\,dx$$

בגלל שהקבוע פורה מגבים את הקירוב הטוב ביותר, מתקיים

$$\int_a^b P(x)\left|f(x)-\sum_{k=1}^{N} c_k \hat{P}_n\right|^2 dx \le \int_a^b P(x)\cdot \max_{a\le x\le b}\left|f(x)-\sum_{k=1}^{N} c_k \hat{P}_n(x)\right|^2 dx$$

$$\le \varepsilon^2 \cdot \int_a^b P(x)\,dx$$

$$\le \varepsilon^2 \cdot \mu_0 \qquad (\mu_0 - \text{המומנט אפס})$$

מסקנה: מערכת הפולינומים צפופה ולכן היא שלמה.

הערה: בשפת מרחבי הילברט דבר על נורמת ה-max הרלוונטית למרחב C ואילו הוכחתנו היא עבור נורמה הרלוונטית ל- L^2.

שני עקרונות עבור פולינומים אורתוגונליים.

I) מערכת פולינומים אורתוגונליים אם"מ מתקיים.

$$P_n(x) \perp_{m<n} P_m(x)$$

דהינו, שלם פולינום מאונך ~~המטריצה~~ לפולינום מתלקה קטנה יותר שזו דומה מהמטריצה.

הוכחה: נניח כי $\langle P_n(x), P_m(x)\rangle = 0$ עבור כל $m<n$

בפרט עבור m מסוים, ולכן מתקיים תנאי האורתוגונליות על המטריצה.

כעת נתבונן בכיוון השני, נתונה מערכת $\{P_n(x)\}$ מערכת אורתוגונלית

מכיוון שניתן להציג פולינום כלשהו, בעזרת אבני המערכת, אזי המערכת שלמה.

מסקנה: אם מתקיים $P_n(x) \perp x^m$ עבור כל $m<n$

אזי $\{P_n(x)\}$ הינה מערכת אורתוגונלית.

II) אם עבור כל פולינום $\pi_n(x)$, המקדם של התלקה הגדולה ביותר שווה 1

דהינו, $\forall \pi_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

אזי

$$\min\left\{\int_a^b P(x)\,|\pi_n(x)|^2 dx\right\} = \int_a^b P(x)\left|\frac{\hat{P}_n(x)}{\mu_n}\right|^2 dx$$

כאשר $\hat{P}_n(x) = \mu_n x^n + \dots + \mu_0$

$$\int_a^b p(x)\left|\frac{\hat{P}_n(x)}{\mu_n}\right|^2 dx = \frac{1}{\mu_n^2}\int_a^b p(x)|\hat{P}_n(x)|^2 dx$$

$$= \frac{1}{\mu_n^2}\cdot 1$$

$$\int_a^b p(x)|\hat{P}_n(x)|^2 dx = 1$$ כי לפי הגדרה

הוכחה: נבנה את $\Pi_n(x)$

$$\Pi_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k \hat{P}_k(x) + \frac{\hat{P}_n(x)}{\mu_n}$$

$$|\Pi_n(x)|^2 = \sum_{k=1}^{n-1} c_k^2 + 1/\mu_n^2$$ לפי משפט פיתגורס.

נרצה למצוא את הפולינום המתוקן $\Pi_n(x)$ שם הנורמה הקטנה ביותר.

$$\min_{\forall \Pi_n(x)}\left\{|\Pi_n(x)|^2\right\} = \min_{\forall \Pi_n(x)}\left\{\sum_{k=1}^{n-1} c_k^2 + \frac{1}{\mu_n^2}\right\}$$

ונקבל את המינימום עבור $c_k=0$ לכל k, דהינו

$$\min_{\Pi_n(x)}\left\{|\Pi_n(x)|^2\right\} = \frac{1}{\mu_n^2} = \|\hat{P}_n(x)\|^2$$

מסקנה: המינימום מתקבל עבור פולינומים אורתוגונליים מתוקנים.

והכיוון ההפוך: פולינומים אורתוגונליים מתוקנים יש נורמה מינימלית.

מבין כל הפולינומים המתוקנים.

יחידות מערכות אורתוגונליות.

משפט: לכל מקטע (a,b) קיימת מערכת אורתוגונלית אחת. (מערכת אורתונormלית) עד כדי קבוע.

ומקדם החלקה הגבוהה ביותר חיובי $\mu_n > 0$.

$$\hat{P}_n(x) = \mu_n x^n + \dots + \mu_1 x + \mu_0$$

הוכחה: נניח כי יש שתי $\hat{P}_n, \hat{Q}_n$ שתי מערכות אורתוגונליות.

אזי גם הצירוף $A\hat{P}_n + B\hat{Q}_n$ מהווה מערכת אורתוגונלית.

עבור כל A, B

נתבונן ב־ $0 < \int_a^b |A\hat{P}_n(x) + B\hat{q}_n(x)|^2 P(x)dx$

נבחר מקדמים A,B כך שיתקיים.

$$A\hat{P}_n(x) + B\hat{q}_n(x) = P_{n-1}(x)$$

$$\int_a^b |A\hat{P}_n(x) + B\hat{q}_n(x)|^2 P(x)dx =$$

$$= \int_a^b P(x)\underbrace{[A\hat{P}_n(x) + B\hat{q}_n(x)]}_{\text{בחרנו את } A,B \text{ רק שיתקבל פולינום מסדר נמוך ב־ } n}dA\hat{P}_n(x)dx + \int_a^b P(x)\underbrace{[A\hat{P}_n(x) + B\hat{q}_n(x)]}_{\text{בחרנו את } A,B \text{ רק שיתקבל פולינום מסדר נמוך יותר}}B\hat{q}_n(x)dx = 0$$

קיבלנו סתירה: בדרך אחד שווה 0, ובדרך שני גדול ב־0.

$$A\hat{P}_n(x) + B\hat{q}_n(x) = 0$$

$$\hat{q}_n(x) = C\hat{P}_n(x)$$

$$\|\hat{q}_n(x)\|^2 = \|C\hat{P}_n(x)\|^2$$

$$1 = C^2 \cdot 1$$

$$C = (\pm 1)$$

עבור $C=1$ נקבל $\hat{P}_n(x) = \hat{q}_n(x)$

וכך שנמצאן יש רק פולינום אחד עם סדר n.

תכונה סימטרית

משפט: עבור פולינומים אורתוגונליים עם פונקציה משקל $P(x)$ זוגית.

נניח $P(x) = P(-x)$ מעל הקטע $[-a,a]$

אזי מתקיים: $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$

עבור חלקות הזוגיות, נניח $n = 2m$ מתקיים $P_{2m}(-x) = P_{2m}(x)$

עבור חלקות אי־זוגיות, נניח $n = 2m+1$, מתקיים $P_{2m+1}(-x) = (-1)P_{2m+1}(x)$

הוכחה: ידוע כי עבור מערכת אורתוגונלים עם משקל, נובע מהמקרין

הראשון כי לכל פולינום $F_m(x)$ עם $m < n$ מתקיים.

$F_m(x)$ לאין־דוגמא נמצא במערכת, אשר פולינום כללי.

$$\int_a^b P(x)\cdot P_n(x)\, F_m(x)\, dx = 0$$

עבור הקטע שלנו $(-a,a)$

$$\int_{-a}^{a} P(x)\, P_n(x)\, F_m(x)\, dx = 0$$

$$x = -t$$

$$\int_{-a}^{a} P(-x)\, P_n(-x)\, F_m(-x)\, dx = \int_{-a}^{a} P(x)\, P_n(-x)\, F_m(-x)\, dx$$

$$= \int_{-a}^{a} P(x)\, P_n(-x)\, F_m^*(x)\, dx = 0$$

מסקנה: הראנו כי גם המערכת $\{P_n(-x)\}$ מאונכת לכל פולינום מסדר נמוך

ולכן גם המערכת $\{P_n(-x)\}$ אורתוגונרמלית, אבל יש משהו יחידת.

כלומר $\{P_n(-x)\} = \{P_n(x)\}$

נשווה את המקדמים, על ההנחה הזו היתר

$$\mu_n x^n = c\,\mu_n (-x)^n = c(-1)^n \mu_n x^n$$

ולכן $c = (-1)^n$

כלומר, $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$

שיוויון תלת-נסיגה

משפט: נתונה מערכת אורתוגונרמלית $\{\hat{P}_n(x)\}$ מעל הקטע (a,b)

עם מונקציית משקל $P(x)$.

אזי כל מערכת מקיימת:

בהנתן $\mu_n > 0$

$$\hat{P}_n(x) = \mu_n x^n + \dots + \mu_0$$

$$\forall n \;;\; \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \hat{P}_{n+1}(x) = (x - c_n)\hat{P}_n(x) + \left(\frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}\right)\hat{P}_{n-1}(x)$$

כלומר: אם ידועים המקדמים μ_0, c_0, והפולינומים $\hat{P}_0(x), \hat{P}_1(x)$

אזי ניתן לחשב את כל המערכת.

הוכחה: הביטוי $x\hat{P}_n(x)$ הינו סה"כ התפקיד האבוהה ביותר.
נלך בעזרת הפירוק

$$x\hat{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k \hat{P}_k(x)$$

$$c_k = \langle x\hat{P}_n(x), \hat{P}_k(x) \rangle$$

$$c_k = \int_a^b x\hat{P}_n(x) \cdot \hat{P}_k(x) \cdot p(x)\,dx$$

כלומר, לכל המקדמים הראשונים, $\hat{P}_n$ מאונך לכל פולינום מדרגה נמוכה
לכן, עבור $k+1 < n$ נקבל $c_k = 0$, ונקבל

$$x\hat{P}_n(x) = c_{n-1}\hat{P}_{n-1}(x) + c_n\hat{P}_n(x) + c_{n+1}\hat{P}_{n+1}(x)$$

$$c_{n+1}\hat{P}_{n+1}(x) = (x - c_n)\hat{P}_n(x) - c_{n-1}\hat{P}_{n-1}(x)$$

26.5.13

הרצאה 11

המשך של משוואות נסיגה

מהות של פרבו-כריסטופל

תכונות אפסים של $P_n(x)$?

א) מקום

ב) פולינומים סוקבים לפי מתאפסים באותה הנקודה.

$P_n(a)=0$ אם $P_{n+1}(a)=0$ אז מתקיים

ג) אם $P_n(a)=0$ אזי $P_{n-1}(a)\cdot P_{n+1}(a)<0$

ד) הכרחה

תרגילים.

המשך משוואת נסיגה

ראינו בהרצאה הקודמת

$$x\hat{P}_n(x) = C_{n-1}\hat{P}_{n-1}(x) + C_n\hat{P}_n(x) + C_{n+1}\hat{P}_{n+1}(x)$$

$$(*)\quad C_{n+1}\hat{P}_{n+1}(x) = \hat{P}_n(x)(x-C_n) - C_{n-1}\hat{P}_{n-1}(x)$$

כאשר $\hat{P}_n(x) = \mu_n x^n + \dots$

$\mu_n > 0$

נשווה מקדמים בין שני אגפי משוואות $(*)$

x_{n+1}: $C_{n+1}\mu_{n+1} = \mu_n$

$$C_{n+1} = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}$$

ונקבל

$$\left(\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}\right)\hat{P}_{n+1}(x) = \hat{P}_n(x)(x-C_n) - \left(\frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}\right)\hat{P}_{n-1}(x)$$

כאשר המקדמים C_k, הם מקדמי פוריה, ומחושבים לפי

$$C_k = \int_a^b P(x)\cdot x\cdot \hat{P}_n(x)\hat{P}_k(x)\,dx$$

$$C_n = \int_a^b P(x)\cdot x\,[P_n(x)]^2\,dx$$

הסימון של פולינום מתוקן, דהיינו $\mu_n = 1$ הוא $\tilde{P}_n(x)$

$$\tilde{P}_n(x) = \frac{1}{\mu_n}\hat{P}_n(x) \Rightarrow \hat{P}_n(x) = \mu_n \tilde{P}_n(x)$$

נגזיר את הפולינום המתוקן במשוואת הנסיגה

$$\mu_n \tilde{P}_{n+1}(x) = \mu_n \tilde{P}_n(x)(x - c_n) - \left(\frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}\right)^2 \tilde{P}_{n-1}(x)$$

$$\tilde{P}_{n+1}(x) = \tilde{P}_n(x)(x - c_n) - \left(\frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}\right)^2 \tilde{P}_{n-1}(x)$$

נגדיר $\lambda_n \triangleq \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}$

$\lambda_n^2 > 0$

אם פונקציית המשקל סימטרית בקטע סימטרי, דהיינו מתקיים

$P(x) = P(-x)$, $[-a,a]$

$$c_n = \int_{-a}^{a} P(x)\cdot x \cdot P_n^2(x)\,dx = 0$$

פונקציה אי-זוגית, על קטע סימטרי

ונקבל את משוואת הנסיגה

$$\tilde{P}_{n+1}(x) = x\tilde{P}_n(x) - \lambda_n^2 \tilde{P}_{n-1}(x)$$

הערה: ההתקיים גם עבור סימטרית בקטע סימטרי, אבל כל $\hat{P}_n(x)$ פונקציה סימטרית.

הערה: יש סימונים מקובלים אחרים בספרות: $c_n \triangleq a_n$, $c_{n+1} \triangleq b_n$

תכונה: עבור כל פולינום בקטע סופי $[a,b]$ מתקיים $\forall |c_k| < C$

המקדמים חסומים ע"י הקבוע, כאשר $C = \max\{|a|,|b|\}$

הוכחת התכונה:

$$c_k = \int_a^b P(x)\cdot x \cdot \hat{P}_n(x)\hat{P}_k(x)\,dx$$

נשתמש באי-שוויון קושי-שוורץ

$$\left|\int_a^b u(x)v(x)\,dx\right|^2 \le \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$$

נזכור כי $P(x)$ פונקציה חיובית.

$$\int_a^b p(x)\cdot x\,\hat{P}_n(x)\hat{P}_k(x)\,dx = \int_a^b \sqrt{p(x)}\cdot x\cdot \hat{P}_k(x)\sqrt{p(x)}\,\hat{P}_n(x)\,dx$$

נשלח שני איברים הרבעים:

$$\left|\int_a^b \left(\sqrt{p(x)}\,x\,\hat{P}_k(x)\right)\left(\sqrt{p(x)}\,\hat{P}_n(x)\right)dx\right|^2 \le \int_a^b p(x)\,x^2\,[P_k(x)]^2\,dx\cdot\int_a^b p(x)\,[P_n(x)]^2\,dx$$

והזדרנו $C \triangleq \max\{|a|,|b|\}$, $x\in[a,b]$

ולכן $x<C$

$$\le C^2\underbrace{\int_a^b p(x)\,[P_k(x)]^2\,dx}_{\|P_k(x)\|^2=1}\cdot\underbrace{\int_a^b p(x)\,[P_n(x)]^2\,dx}_{\|P_n(x)\|^2=1}$$

ולכן נובע $c_k = \int_a^b p(x)\cdot x\cdot\hat{P}_k(x)\hat{P}_n(x)\,dx \le C = \max\{|a|,|b|\}$

להוכיח דרבו-כריסטופל

מתקיים

$$\sum_{k=0}^{n}\hat{P}_k(x)\hat{P}_k(t) = \lambda_n\left[\frac{\hat{P}_{n+1}(x)\hat{P}_n(t)-\hat{P}_{n+1}(t)\hat{P}_n(x)}{x-t}\right]$$

הוכחה: נשתמש בנוסחת הנסיגה

$$c_{n+1} = \lambda_n$$

$$\lambda_n\hat{P}_{n+1}(x) = (x-c_n)\hat{P}_n(x) - \lambda_{n-1}\hat{P}_{n-1}(x)$$

נכפול שני אגפים ב- $\hat{P}_n(t)$, ונקבל

$$\lambda_n\hat{P}_n(t)\hat{P}_{n+1}(x) = (x-c_n)\hat{P}_n(x)\hat{P}_n(t) - \lambda_{n-1}\hat{P}_n(t)\hat{P}_{n-1}(x) \qquad (**)$$

נחליף תפקיד את המשוואה $(**)$ אם נכפיל בין x ו- t

$$\lambda_n\hat{P}_n(x)\hat{P}_{n+1}(t) = (t-c_n)\hat{P}_n(t)\hat{P}_n(x) - \lambda_{n-1}\hat{P}_n(x)\hat{P}_{n-1}(t)$$

נחסר בין שני המשוואות, ונקבל

$$\lambda_n\left[\hat{P}_n(t)\hat{P}_{n+1}(x)-\hat{P}_n(x)\hat{P}_{n+1}(t)\right] = (x-t)\hat{P}_n(t)\hat{P}_n(x) + \lambda_{n-1}\left[\hat{P}_n(x)\hat{P}_{n-1}(t)-\hat{P}_n(t)\hat{P}_{n-1}(x)\right]$$

$$(x-t)\hat{P}_n(t)\hat{P}_n(x) = \lambda_n\left[\hat{P}_n(t)\hat{P}_{n+1}(x)-\hat{P}_n(x)\hat{P}_{n+1}(t)\right] - \lambda_{n-1}\left[\hat{P}_n(x)\hat{P}_{n-1}(t)-\hat{P}_n(t)\hat{P}_{n-1}(x)\right]$$

נסכום את המשוואה על n אינדקסים, נכפיל (x-t) לפני סוגריים

$$(x-t)\sum_{k=1}^{n}\hat{P}_k(x)\hat{P}_k(t)=\sum_{k=1}^{n}\Big\{\lambda_n\big[\hat{P}_{k+1}(x)\hat{P}_k(t)-\hat{P}_{k+1}(t)\hat{P}_k(x)\big]-$$

$$-\lambda_{k-1}\big[P_k(x)P_{k-1}(t)-P_k(t)P_{k-1}(x)\big]\Big\}$$

קיבלנו האגף ימין, טור טלסקופי $\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=a_n-a_0$

$$(x-t)\sum_{k=1}^{n}\hat{P}_k(x)\hat{P}_k(t)=\lambda_n\big[\hat{P}_{n+1}(x)\hat{P}_n(t)-\hat{P}_{n+1}(t)\hat{P}_n(x)\big]$$

$$-\lambda_0\big[\hat{P}_1(x)\hat{P}_0(t)-\hat{P}_1(t)\hat{P}_0(x)\big]$$

נוסף לזה נוסיף אגפים את הביטוי $(x-t)\big[\hat{P}_1(x)\hat{P}_0(t)-\hat{P}_1(t)\hat{P}_0(x)\big]$

כאשר תנאי ההתחלה מתקיים:

$$(x-t)\big[\hat{P}_1(x)\hat{P}_0(t)-\hat{P}_1(t)\hat{P}_0(x)\big]=\lambda_0\big[\hat{P}_1(x)\hat{P}_0(t)-\hat{P}_1(t)\hat{P}_0(x)\big]$$

$$P_0(x)=P_0(t)=\mu_0$$

$$\begin{cases}P_1(x)=\mu_1 x+\alpha\\ P_1(t)=\mu_1 t+\alpha\end{cases}$$

נדיר את הביטויים, ונקבל את הבהות.

לאחר היפסת הבהות שני אגפים, נחלק את שני האגפים ב- (x-t) ונקבל את בהות דרבו-כריסטופל.

הערה: הביטוי $\sum_{k=0}^{n}\hat{P}_k(x)\hat{P}_k(t)$ נקרא גם הגרעין של כריסטופל.

נתבונן במקרה בו $x\to t$

$$\sum_{k=0}^{n}|P_k(x)|^2=\lim_{x\to t}\lambda_n\left[\frac{\hat{P}_{n+1}(x)\hat{P}_n(t)-\hat{P}_{n+1}(t)\hat{P}_n(x)}{x-t}\right]$$

באגף ימין מתקבלים 0/0 ולכן נשתמש בלופיטל.

נגזור מונה ומכנה לפי t, ונקבל

$$=\lim_{x\to t}\lambda_n\frac{\hat{P}_{n+1}(x)\hat{P}'_n(t)-\hat{P}'_{n+1}(t)P_n(x)}{-1}$$

כאשר נציב $t=x$

$$\sum_{k=0}^{n}|P_k(x)|^2 = a_n\left[P'_{n+1}(x)P_n(x)-P_{n+1}(x)P'_n(x)\right]$$

$$\sum_{k=0}^{n}|P_n(x)|^2 \geq 0 \quad \text{ו} \quad a_n>0$$

ולכן

$$P'_{n+1}(x)P_n(x)-P_{n+1}(x)P'_n(x) \geq 0$$

נתבונן בנקודה a, בה מתקיים $\hat{P}_n(a)=0$, ונקבל

$$-\hat{P}_{n+1}(a)\hat{P}'_n(a)>0$$

$$\hat{P}_{n+1}(a)P'_n(a)<0$$ או להיפוך

תכונות אפסים של $P_n(x)$:

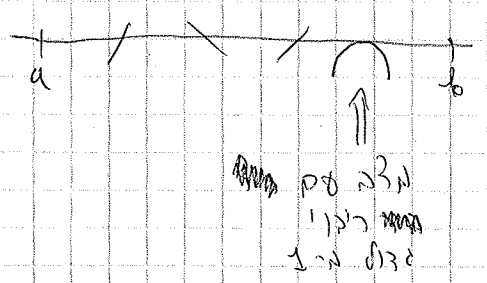
P_n פולינום ממעלה n $\{P_n(x)\}$ על קטע $[a,b]$

אז מתקיים: כל האפסים a_n בקטע ש- $P_n(a_n)=0$ נמצאים בקטע $[a,b]$

כל האפסים ממשיים, רואטיים (ללא ריבוי / ריבוי זוגי ב-1)

ונמצאים בתוך הקטע (a,b) (ללא הקצוות).

הוכחה: נוכיח כי יש m שינוי סימן בקטע (a,b)



נוכיח בדרך השלילה.

נניח כי לפולינום מהמערכת יש m שינויים, $m<n$.

נבנה את הפולינום הבא.

$$W(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_m)$$ (x_m פורשים עם של $\hat{P}_n$)

אזי לביטוי $P_n(x)W(x)$ תמיד עם אותו סימן (חיובי או שלילי)

וגם הביטוי $P(x)P_n(x)W(x)$ תמיד עם אותו סימן.

$$\int p(x)P_n(x)w(x)dx = \begin{cases} >0 \text{ or } <0 & \text{האינטגרל תמיד עם אותו סימן} \\ =0 & \text{כי חלק משותק של פולינום ממעלה - קטנה} \end{cases}$$

מסקנה: אין פולינום אשר עם m אפסים על $[a,b]$ כך ש- $n<m$.

ולכן $n=m$. דהיינו יש n שורשים עם ריבוי 1 בלבד

וכל השורשים נמצאים בקטע (a,b).

2.6.13

הרצאה 2

תוכן

I) המשפחה הכפולות אורתוגונליות:

א) $P_{n-1}(a)=0$ אזי $P_n(a)=0$ לא מתקיים

ב) $P_n(a)=0 \Leftarrow P_{n-1}(a)\cdot P_{n+1}(a)<0$

II) הפרדת שורשים

III) משפט הקונבה

IV) תרגילים

המשפחה הכפולות:

נתונה מערכת $\{\hat{P}_n(x)\}$ הניתנת $\langle \hat{P}_n(x), \hat{P}_m(x)\rangle = \delta_{m,n}$ מעל מרחב $L^2_{p(x)}$ לפונקציות

כל השורשים ממשיים, נמצאים בקטע $[a,b]$, עם ריבוי אחד.

$x_k^{(n)}$ - השורש ה-k של פולינום $\hat{P}_n(x)$. $\hat{P}_n(x_k^{(n)})=0$

$a<x_1^{(n)}<x_2^{(n)}<\dots<x_n^{(n)}<b$

ראינו כי כל הפולינומים מקיימים את נוסחת הנסיגה:

$$\lambda_n \hat{P}_{n+1}(x) = (x-c_n)\hat{P}_n(x) - \lambda_{n-1}\hat{P}_{n-1}(x) \quad \forall n\geq 0$$

נכפול את המשוואה לעיל, במכפלה פנימית ב- $\hat{P}_{n+1}(x)p(x)$

$p(x)$ - פונקציית משקל

$\hat{P}_{n+1}(x)$ - הפולינום ה-$n+1$

$$\int_a^b \lambda_n \hat{P}_{n+1}\cdot\hat{P}_{n+1}p(x)dx = \int_a^b (x-c_n)\hat{P}_n(x)\hat{P}_{n+1}(x)p(x)dx - \int_a^b \lambda_{n-1}\hat{P}_{n-1}(x)\hat{P}_{n+1}(x)p(x)dx$$

$$\lambda_n = \int_a^b (x-c_n)\hat{P}_n(x)\hat{P}_{n+1}(x)p(x)dx - 0$$

$$\lambda_n = \int_a^b x\hat{P}_n(x)\hat{P}_{n+1}(x)p(x)dx - c_n\int_a^b \hat{P}_n(x)\hat{P}_{n+1}(x)p(x)dx$$

$$\lambda_n = \int_a^b x\hat{P}_n(x)\hat{P}_{n+1}(x)p(x)dx$$

כמו-כן מתקיים

$$\hat{P}_n(x) = \mu_n x^n + \dots$$

$$x\hat{P}_n(x) = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}\hat{P}_{n+1}(x) + R_n(x)$$

$R_n(x)$ שארית

נציב את $x\hat{P}_n(x)$ במשוואה

$$\lambda_n = \int_a^b [x\hat{P}_n(x)]\,\hat{P}_{n+1}(x)\,p(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\mu_n \hat{P}_{n+1}(x)}{\mu_{n+1}} + R_n(x)\right]\hat{P}_{n+1}(x)\,p(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}\right)[\hat{P}_{n+1}(x)]^2\,p(x)\,dx + \int_a^b R_n(x)\,\hat{P}_{n+1}(x)\,p(x)\,dx$$

מתאפס $R_n(x)$ הינו פולינום

מסדר נמוך מ- $(n+1)$

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}\int_a^b [P_{n+1}(x)]^2\,p(x)\,dx = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} > 0$$

נסמן את w כשורש של $\hat{P}_n(x)$ גם של $P_{n+1}(x)$ (ההוכחה בדרך השלילה)

דהיינו: $\hat{P}_{n+1}(w) = \hat{P}_n(w) = 0$

נרשום את משוואת הנסיגה: $\lambda_n \hat{P}_{n+1}(w) = (w - c_n)\hat{P}_n(w) - \lambda_{n-1}\hat{P}_{n-1}(w)$

נקבל $0 = 0 - \lambda_{n-1}\hat{P}_{n-1}(w)$

דהיינו $\hat{P}_{n-1}(w) = 0$

ובסוף השרשרת נקבל $\hat{P}_0(w) = 0$

ויודעים כי $P_0(x) = \mu_0 > 0 \quad \forall x$

קיבלנו סתירה, ולכן המסקנה:

$\hat{P}_n(w) = 0$ אם ורק אז מתקיים $\hat{P}_{n+1}(w) = 0$

נסמן שוב את w כשורש, אבל הפעם רק של $\hat{P}_n(x)$, ונבדוק את

נוסחת הנסיגה. $\lambda_n \hat{P}_{n+1}(w) = (w - c_n)\hat{P}_n(w) - \lambda_{n-1}\hat{P}_{n-1}(w)$

$$\lambda_n \hat{P}_{n+1}(w) = -\lambda_{n-1}\hat{P}_{n-1}(w)$$

$$\frac{\hat{P}_{n+1}(w)}{\hat{P}_{n-1}(w)} = -\left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right) \qquad \forall n \quad \lambda_n > 0$$

ההוכחה כי: $P_{n+1}(w)\,P_{n-1}(w) < 0$

תכונה ה' הכרחית אכסיס.

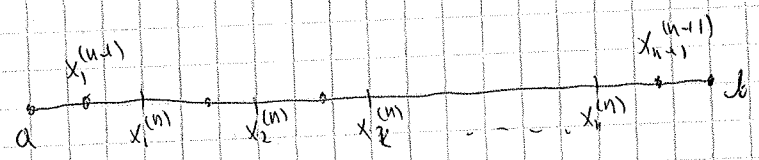
נסמן שורשי את השורשים של $\hat{P}_n(x)$, $x_k^{(n)}$

$$a < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \dots < x_n^{(n)} < b$$

כמו-כן נרשום את השורשים של $\hat{P}_{n+1}(x)$, $x_k^{(n+1)}$

$$a < x_1^{(n+1)} < x_2^{(n+1)} < \dots < x_{n+1}^{(n+1)} < b$$

אזי בין כל 2 שורשים של $\hat{P}_n(x)$ נמצאו בינהם שורש של $\hat{P}_{n+1}(x)$



$$a < x_1^{(n+1)} < x_1^{(n)} < x_2^{(n+1)} < x_2^{(n)} < \dots < x_n^{(n)} < x_{n+1}^{(n+1)} < b$$

הוכחה: ראשית נבדוק את סימני פולינומים בקצוות a, b.

$\hat{P}_n(a) = ?$

נסתכל לשני מקרים: n זוגי $n=2m$

n אי-זוגי $n=2m+1$

בין a ל- $x_1^{(n)}$ אין אף שורש, ולכן אין שינוי סימן.

$\hat{P}_{2m}(a) > 0$

כי אותנו מעניין רק המקדם הגדול ביותר x^{2m}

וכאשר $x \to -\infty$ נקבל ביטוי חיובי.

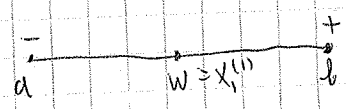
$\hat{P}_{2m+1}(a) < 0$

עבור הערך של הפולינום ב- b, הפולינום $\hat{P}_n$ תמיד חיובי עבור $x \to \infty$

ולכן תמיד $\hat{P}_n(b) > 0$

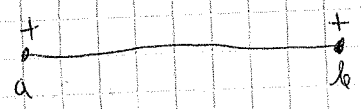
$P_0(x) = \mu_0$

$P_1(x) =$



כעת נתבונן בפולינום $P_2(x)$.

$P_2(x) =$



נזכור הנוסחה של מטריצת כריסטופל-דרבו (שהרי לוסיטלן)

$$\sum_{k=0}^{n} |\hat{P}_k(x)|^2 = \text{מג}\left[\hat{P}'_{n+1}(x)\hat{P}_n(x) - P_{n+1}(x)P'_n(x)\right] > 0$$

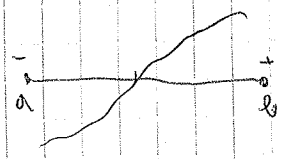
נניח שורש של $\hat{P}_n$ $\quad x=w:\ \hat{P}_n(w)=0$

ונקבל

$$\hat{P}'_{n+1}(w)\cdot\underbrace{\hat{P}'_n(w)}_{=0} - \hat{P}_{n+1}(w)\cdot\hat{P}'_n(w) > 0$$

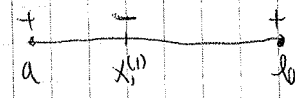
כלומר $\quad \hat{P}_{n+1}(w)\cdot P'_n(w) < 0$

אם נסתכל על $n=1$, הנגזרת של $\hat{P}_1$ בשורש הראשון (היחיד) הוא חיובי כי



ולכן המטריצת מטריצת כריסטופל-דרבו נקבל $\hat{P}_2(w)<0$

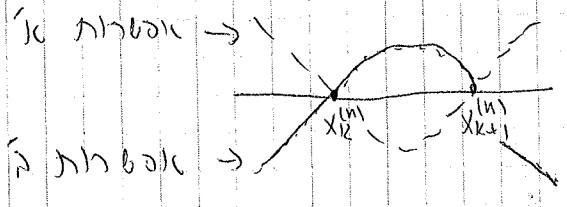
כלומר, שבור w_2



דהיינו, נקבל ברבולה, וגם קיבלנו כי שני השורשים נמצאים בין $[a, x_1^{(1)}]$ ובין $[x_1^{(1)}, b]$

כעת נבדוק הטווח דומה שבור $\hat{P}_n$ כללי.

נתונים 2 אפסים של פולינום $\hat{P}_n$ $\quad x_k^{(n)},\ x_{k+1}^{(n)}$



שבור אופטרות ב', הנגזרת של $\hat{P}_n$ היה חיובי ב- $x_k^{(n)}$, ושלילי $x_{k+1}^{(n)}$.

שבור שני האופטרויות, הנגזרת של $\hat{P}_n$ תשנה סימן

ולכן גם $\hat{P}_{n+1}(x)$ ישנה סימן, ונקבל אפס בין $x_k^{(n)}$ ובין $x_{k+1}^{(n)}$

קיבלנו הפרדת אפסים.

משפט איקונה

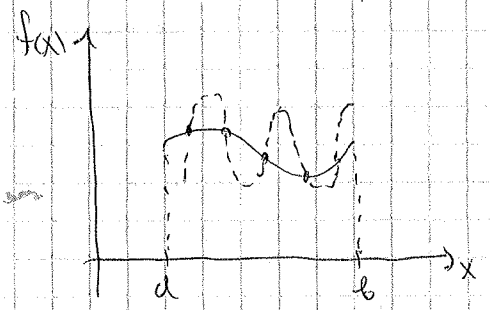
נתון כי $f(x) \in L^2_{P(x)}[a,b]$ ו-$P(x)$ פונקציית משקל.

נסמן את המקדמי פורייה של $f(x)$ ב-c_n כ-$c_n = \langle f(x), \hat{P}_n(x) \rangle$

נסמן את S_n, סכומים חלקיים של טור פורייה

$$S_n(f,x) \triangleq S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \hat{P}_k(x)$$

נתבונן בגרף של הפונקציה $f(x)$ בקטע $[a,b]$



הקו הרציף $y = f(x)$

הקו המקווקו $y = S_n(x)$

נסמן את השגיאה

$$\varphi(x) = f(x) - S_n(x)$$

משפט איקונה אומר כי יש לפחות $n+1$ אפסים לשגיאה $\varphi(x)$, לפחות.

לפחות $(n+1)$ שינוי סימן.

הוכחה: נוכיח בדרך השלילה.

נניח שיש m שינוי-סימן בקטע $[a,b]$, כאשר $m \le n$

נסמן את הפונקציה $w(x)$

$$w(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_m)$$

$$\int_a^b \varphi(x)\hat{P}_k(x)P(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - S_n(x)]\hat{P}_k(x)P(x)\,dx$$

$$= \int_a^b f(x)\hat{P}_k(x)P(x)\,dx - \int_a^b S_n(x)\hat{P}_k(x)P(x)\,dx$$

$$= c_k - \int_a^b \sum_{s=0}^{n} c_s \hat{P}_s(x)\hat{P}_k(x)P(x)\,dx$$

$$= c_k - \sum_{s=0}^{n} c_s \int_a^b \hat{P}_s(x)\hat{P}_k(x)P(x)\,dx$$

$$= c_k - c_k = 0$$

מצד אחד $\int_a^b \varphi(x)\hat{P}_k(x)P(x)dx = \int_a^b [f(x)-S_n(x)]\hat{P}_k(x)P(x)dx = 0$

מצד שני $\int_a^b [f(x)-S_n(x)]w_m(x)P(x)dx$

נציב את $w_m(x)$ - כצירוף לינארי של $\hat{P}_n(x)$ $w_m(x)=\sum_{k=0}^{m} c_k\hat{P}_k(x)$

$w_m(x)$ מוגדר לפי המערכת של $\varphi(x)$ ולכן תחת האינטגרל

$\int \varphi(x)w_m(x)P(x)dx$

הביטוי $\varphi(x)w_m(x)$ הינו בעל אותו סימן תיחום או שלילי

ולכן נקבל $\int \varphi(x)w_m(x)P(x)dx \neq 0$

המכיוון ש- $w_m(x)$ הינו צירוף לינארי של $\hat{P}_k(x)$ קבלנו סתירה.

מסקנה: ל- $\varphi(x)$ יש לפחות $(n+1)$ שורשים.

9.6.13

הרצאה 3

תרגול:

ג) תכונות פולינומים - תרגילים.

כל תרגילים מספר 6 - מטרכות אורתוגונליות.

שאלה 1: נגדיר פונקציה $T_n(x) = \cos[n \cdot \arccos(x)]$

$T_n(x) \in L^2_{p(x)}[-1,1]$

$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ פונקציית משקל

א) הוכח כי סדרת הפונקציות $\{T_n(x)\}$ היא סדרת פולינומים של x מדרגה n, הנקראת פולינומי צ'בישב (chebyshev)

פתרון: נסמן $\theta = \arccos(x)$

$$T_n(x) = \cos(n\cdot\theta) = \tfrac{1}{2}\left[e^{in\theta} + e^{-in\theta}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[(e^{i\theta})^n + (e^{-i\theta})^n\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n + (\cos(\theta) - i\sin(\theta))^n\right]$$

$\theta = \arccos(x) \Rightarrow x = \cos(\theta) \Rightarrow \sin(\theta) = \sqrt{1-x^2}$

$0 \le \theta \le \pi \Rightarrow -1 \le x \le 1$ השאיפה לקבל פונקציה, נזכרים:

$$T_n(x) = \tfrac{1}{2}\left\{\left[x + i\sqrt{1-x^2}\right]^n + \left[x - i\sqrt{1-x^2}\right]^n\right\}$$

נפתח את הסוגריים לפי הבינום של ניוטון

$$T_n(x) = \tfrac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}\left(i\sqrt{1-x^2}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}\left(-i\sqrt{1-x^2}\right)^k\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} (i)^k \left(\sqrt{1-x^2}\right)^k \left[1 + (-1)^k\right]$$

עבור k אי-זוגי הביטוי מתאפס, נקח n זוגי.

$k = 2s$; $s = 0, \dots, n/2$

$$T_n(x) = \sum_{s=0}^{n/2} C_n^{2s} x^{n-2s} \cdot (i)^{2s} (1-x^2)^s$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} (-1)^{k/2} \underbrace{(1-x^2)^{k/2}}_{\uparrow}$$

נירמלנו הגבוהה x^k

הוכחנו כי $T_n(x)$ הינו פולינום של x במעלה n.

ב) הוכחת כי $\{T_n\}$ הינו מערכת אורתוגונלית בקטע $[-1,1]$

בתנאי שפונקציית המשקל היא $P(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

הוכחה: מוטיבציה נמשיך לבדוק כי בקטע $[-1,1]$ הפונקציה מונוטונית

כדי נוכל לבצע את האינטגרל.

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)P(x)dx = \int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

נגדיר $x = \cos(\theta)$

$dx = -\sin(\theta)d\theta$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{\sin(\theta)}\cos(n\theta)\cos(m\theta)\sin(\theta)d\theta =$$

סימן האינטגרל בגלל התחלת 0 ו- π.

$$= \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)]d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+m)\theta)}{n+m} + \frac{\sin((n-m)\theta)}{n-m}\right]_0^{\pi} = 0$$

עבור $m = n$ נקבל

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_n(x)P(x)dx = \int_0^{\pi} \cos^2(n\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}[1+\cos(2\theta)]d\theta = \pi/2$$ עבור $n \neq 0$

$$\|T_n(x)\| = \begin{cases} \sqrt{\pi} & n = 0 \\ \sqrt{\pi/2} & n \neq 0 \end{cases}$$

ג) את $T_n(x) = \gamma_n x^n + \dots + \gamma_0$

יש לחשב את γ_n ?

כדי לחשב נבטא בעזרת

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right]$$

בשביל למצוא את המקדם γ_n נחשב

$$\gamma_n = \lim_{x\to\infty} \frac{T_n(x)}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\gamma_n x^n + \dots + \gamma_1}{x^n}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n} + \frac{\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x}\right)^n + \left(\frac{x - \sqrt{x^2-1}}{x}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\left[\left(1 + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n + \left(1 - \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(2^n\right) + (1-1)^n$$

$$\gamma_n = 2^{n-1}$$

נתבונן בדרך אחרת

$$\cos[(n+1)\theta] + \cos[(n-1)\theta] = 2\cos(n\theta)\cos(\theta)$$

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2T_n(x)\cdot x$$

$$T_{n+1}(x) = 2T_n(x)\cdot x - T_{n-1}(x)$$

ונחשב את כלל הנסיגה.

$n=0 \Rightarrow \cos(0) = 1 \Rightarrow T_0(x) = 1$

$n=1 \Rightarrow \cos(\theta) = x \Rightarrow T_1(x) = x$

$n=2 \Rightarrow T_2(x) = 2x^2 - 1$

$n=3 \Rightarrow T_3(x) = 2\cdot T_2(x)\cdot x - T_1(x)$

$= 2\left[2x^2-1\right]\cdot x - x$

$n=3 \Rightarrow T_3(x) = 4x^3 - 2x^2 - x$

סעיף ג': פתרון

$$\|T_n(x)\| = \begin{cases} \sqrt{\pi} & n=0 \\ \sqrt{\pi/2} & n\neq 0 \end{cases}$$

סעיף ה': הוכח כי לכל $T_n(x)$ הינו פתרון של המשוואה

$$\left[\sqrt{1-x^2}\cdot y'\right]' + n^2 \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

ולכן $T_n(x)$ הינו פונקציה עצמית של האופרטור?

פתרון: נריץ להציב $y=T_n(x)$ ונראות כי אכן מתקבל פתרון.

רק נוסיף נראות שגם את המשוואה

$$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}y' + y''\sqrt{1-x^2} + n^2\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

מכפילים ב- $\sqrt{1-x^2}$

$$y''(1-x^2) - xy' + n^2 y = 0$$

כאשר, נתבונן לפתרון.

$y = T_n(x) = \cos(n\theta)$

$y' = -n\cdot\sin(n\theta)\cdot d\theta/dx$

$\sqrt{1-x^2} = \sin(\theta)$

$$\left[\sqrt{1-x^2}\cdot y'\right]' = \left[\sin\theta\cdot n\sin(n\theta)\, d\theta/dx\right]'$$

$$= -\cos(\theta)\cdot n\cdot\sin(n\theta)(d\theta/dx)^2 - \sin(\theta)n^2\cos(n\theta)(d\theta/dx)^2 - \sin(\theta)n\sin(n\theta)\frac{d^2\theta}{dx^2}$$

נתבונן בהצבה הבאה של המשוואה

$$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}y' + y''\sqrt{1-x^2} + n^2\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

יקבלו פתרון הנו בהתאמה הבאה. לתרגיל-בית.

נגדיר $y = \cos(n\cdot\arccos(x))$

$$y' = -n\sin(*)\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{n\cdot\sin(n\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}$$

שאלה 2: יהי $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$ עיגול יחידה סתום ב-$\mathbb{R}^2$.

ויהי $C(D)$ אוסף כל הפונקציות הרציפות $f:D\to\mathbb{C}$

לכל $f,g\in C(D)$ נגדיר מכפלה פנימית.

$$\langle f,g\rangle=\iint_D f(x,y)\cdot\overline{g(x,y)}\,dx\,dy$$

ולכל n טבעי תהי $f_n(x,y)=(x+iy)^n$

א) הוכח כי $\langle f,g\rangle$ היא מכפלה פנימית על $C(D)$?

פתרון: יש לבדוק כי התכונות מתקיימות.

ב) הוכח כי סדרת הפונקציות $\{f_n(x,y)\}_{n=0}^{\infty}$ היא מערכת אורתוגונלית

ותשב את $\|f_n\|$?

פתרון:

$$\iint_D (x+iy)^n\,(x-iy)^m\,dx\,dy$$

נגדיר $x+iy=re^{i\varphi}$

$J=r$

$0\le r\le 1\ ,\ 0\le\varphi\le 2\pi$

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} r^n e^{in\varphi}\cdot r^m e^{-im\varphi}\cdot r\,dr\,d\varphi=\int_0^1 r^{m+n+1}\,dr\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi}\,d\varphi$$

$\Uparrow$

אם $m\neq n$ מתאפס, שכן.

$$\left.\frac{e^{i(n-m)\varphi}}{i(n-m)}\right|_0^{2\pi}=0$$

אם $m=n$

$$\|f_n\|^2=\left.\frac{r^{2n+2}}{2n+2}\right|_0^1\cdot 2\pi=\frac{\pi}{n+1}$$

שאלה 3: הפולינומים של לז'נדר (Legender) הם:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

א) הוכח כי במרחב $L^2[-1,1]$ מתקיים

$$\langle P_n(x),P_m(x)\rangle=\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \frac{2}{2n+1} & n=m\end{cases}$$

$P(x)$ פונקציית הנורמה, עבור לגנדר $P(1)=1$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{1}{2^m \cdot m!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \frac{d^m (x^2-1)^m}{dx^m} dx$$

$$\varphi(x) \triangleq (x^2-1)^n = (x-1)^n (x+1)^n$$

φ ונגזרותיה מתאפסות בקצוות $x=(\pm 1)$

$$\begin{cases} \varphi(\pm 1) = 0 \\ \varphi^{(s)}(\pm 1) = 0 \quad , s < n \end{cases}$$

16.6.13
הרצאה 14

תוכן

I) התכנסות נקודתית והמידה שבה טור פוריה / פולינומים אורתוגונליים.

II) המשך תרגילים

III) הכנה למבחן.

נתבונן בפונקציה $f(x)$ הנייחת למדרגה $f(x) \in CL^2_{p(x)}[a,b]$

$p(x)$ פונקציית משקל.

$\{\hat{P}_n(x)\}$ מערכת פולינומים אורתוגונליים $\langle \hat{P}_n(x), \hat{P}_m(x) \rangle = \delta_{mn}$

$$c_k = \langle f(x), \hat{P}_k(x) \rangle = \int_a^b p(t) f(t) \hat{P}_k(t)\, dt$$

נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים S_n עבור פונקציה $f(x)$ לפי הסדרה $\{\hat{P}_n(x)\}$

$$S_n(f;x) \triangleq S_n(x) = \sum_{n=0}^{n} c_k \hat{P}_k(x)$$

הגדרה: פונקציה $f(x)$ נייחת למדרגה $Lip^{\hat{\alpha}}_M$ אם היא מקיימת

$$|f(x) - f(t)| \le M \cdot |x-t|^{\alpha}$$

דוגמא: $f'(x) \in C'[a,b]$

אם $|f'(x)| < M$

אזי $|f(x) - f(t)| = |f'(u)(x-t)| \le M|x-t|$

משפט: נתונים התנאים להלן. α בסביבה של x $f(x) \in Lip^{\hat{\alpha}}_M$ I)

$\{x\} \subseteq [a,b]$ בן הקטע

II) $\forall n \quad |\hat{P}_n(x)| \le K$

גם II מתקיים או במובן א' או במובן ב' של תנאי I.

אם שני התנאים לעיל מתקיימים, אזי

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$$

במובן א' או במובן ב'.

לכל: $\forall \varepsilon>0 \; ; \; \exists \begin{cases} N(\varepsilon,x) & \text{בנקודה } x \\ N(\varepsilon) & \text{בנקודה } \forall \end{cases} \; ; \; |S_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ $\quad n>N$

הוכחה:

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k \hat{P}_k(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\int_a^b f(t)P(t)\hat{P}_k(t)\,dt\right)\hat{P}_k(x)$$

$$=\int_a^b f(t)P(t)\left(\sum_{k=0}^{n}\hat{P}_k(x)\hat{P}_k(t)\right)dt$$

נסמן את גרעין דרבו-כריסטוף $K(x,t)\triangleq\sum_{k=0}^{n}\hat{P}_k(x)\hat{P}_k(t)$

ראינו כי הגרעין מקיים (הגרעין, כמובן, תלוי גם ב-n).

$$(*)\quad K_n(x,t)=\lambda_n\left[\frac{\hat{P}_{n+1}(x)\hat{P}_n(t)-\hat{P}_{n+1}(t)\hat{P}_n(x)}{x-t}\right]$$

$$S_n(x)=\int_a^b f(t)P(t)K_n(x,t)\,dt$$

נניח $f(x)\equiv 1$, ונקבל

$$1=\int_a^b P(t)K_n(x,t)\,dt$$

נכפיל שני אגפים ב-$f(x)$.

$$f(x)=\int_a^b f(x)P(t)K_n(x,t)\,dt$$ (נכנס לאינטגרל, לא תלוי ב-t)

$$f(x)-S_n(x)=\int_a^b P(t)K_n(x,t)[f(x)-f(t)]\,dt$$

נציב את $K_n(x,t)$ לפי $(*)$

$$f(x)-S_n(x)=\int_a^b P(t)[f(x)-f(t)]\lambda_n\frac{[\hat{P}_{n+1}(x)\hat{P}_n(t)-\hat{P}_{n+1}(t)\hat{P}_n(x)]}{x-t}\,dt$$

$$f(x)-S_n(x)=\lambda_n\int_a^b P(t)\underbrace{\left[\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\right]}_{\text{הפונקציה לפי הנתונה}}[\hat{P}_{n+1}(x)\hat{P}_n(t)-\hat{P}_{n+1}(t)\hat{P}_n(x)]\,dt$$

$\lambda_n\le C$

$C=\max\{|a|,|b|\}$

$\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(t)}{x-t}$, $\varphi(x)\in CL^2_{P(x)}[a,b]$ מהסתמך על הנחה I

$f(x)\in Lip^1_M$

$\varphi(x)$ פונקציה של x, t משתנה אינטגרציה

$$f(x)-S_n(x) = \lambda_n\left[\left(\int_a^b P(t)\varphi(x,t)\hat{P}_n(t)\,dt\right)\hat{P}_{n+1}(x) - \left(\int_a^b P(t)\varphi(x,t)\hat{P}_{n+1}(t)\,dt\right)\cdot\hat{P}_n(x)\right]$$

נגדיר את מקדם פורייה של $\varphi(x,t)$

$$C_n^*(\varphi) = \int_a^b P(t)\varphi(x,t)\hat{P}_n(t)\,dt$$

נזכר כי $|a+b| \le |a|+|b|$

$$|f(x)-S_n(x)| \le C\left[|C_n^*(\varphi)\hat{P}_{n+1}(x)| + |C_{n+1}^*(\varphi)\hat{P}_n(x)|\right]$$

$$|f(x)-S_n(x)| \le C\left[|C_n^*(\varphi)|\cdot|\hat{P}_{n+1}(x)| + |C_{n+1}^*(\varphi)||\hat{P}_n(x)|\right]$$

לפי הנחה II של המשפט $\forall n \quad |\hat{P}_n(x)| < K$

$$|f(x)-S_n(x)| \le CK\left[|C_n^*(\varphi)| + |C_{n+1}^*(\varphi)|\right]$$

מכיוון ש- $C_n^*(\varphi)$ הם מקדם פורייה של φ, אזי מתקיים $C_n^*(\varphi) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

אם ההתכנסות לפי א', אזי $f(x)$ מתכנס ל-$S_n(x)$ נקודתית.

אם ההתכנסות לפי ב', אזי $f(x)$ מתכנס ל-$S_n(x)$ במידה שווה.

כל הדברים מסכם ל- משפחות אורתוגונליות

שאלה 3 פ' הפולינומים של לג'נדר (Legander) הם

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

הם הלגה רודריגז.

הוכיחו: לכל פולינום קשרים (עם משקל פירסון, משקל המקיים

$$\left(\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{y'}{y}\right) \qquad A(x)=ax+b \ , \ B(x)=c_1x^2+c_2x+c_3$$

יש הלגה רודריגז.

א) הוכיחו כי במרחב $L^2[-1,1]$ מתקיים

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & n\ne m \\ \frac{2}{2n+1} & n=m \end{cases}$$

פונקציית הבסיס מהיחידה $P(x)=1$

$$\varphi(x) = (x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$$

הנגזרת מסדר s של φ בקצוות שווה 0.

$$\varphi^{(s)}(x=\pm 1) = 0 \qquad s<n$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \frac{1}{2^n\cdot 2^m\, n!\, m!}\int_{-1}^{1}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,\frac{d^m(x^2-1)^m}{dx^m}\,dx$$

נבצע אינטגרציה בחלקים.

$$u = \frac{d^m(x-1)^m}{dx^m} \qquad dv = \frac{d^n(x-1)^n}{dx^n}$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \frac{1}{n!\,m!\,2^n}$$

$$\left[\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\,\frac{d^m(x^2-1)^m}{dx^m} - \frac{d^{n-2}(x^2-1)^n}{dx^{n-2}}\,\frac{d^{m+1}(x^2-1)^m}{dx^{m+1}}\right.$$

מתאפס מהגבלת האינטגרציה

$$+ \dots + (-1)^{n-1}\frac{d[(x^2-1)^n]}{dx}\,\frac{d^{m+n-1}(x^2-1)^m}{dx^{m+n-1}}\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$+ (-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,\frac{d^{m+n}(x^2-1)}{dx^{m+n}}\,dx$$

לאחר איפוס האגפים נקבל

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \frac{(-1)^n}{n!\,m!\,2^n}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,\frac{d^{n+m}(x^2-1)^m}{dx^{n+m}}\,dx$$

אם $n>m$ אזי $n+m>2m$ (הגדרת הבסיס)

$(x^2-1)^m$ הינו פולינום מסדר $2m$ ולכן נגזרת מסדר $n+m>2m$ יתן אפס.

מסקנה: הבתירה בין n ל- m מרכיבתית, ולפעמים הוכחנו כי הפולינום מתאפס עבור $n\neq m$, הוכחנו אורתוגונליות.

כעת נבדוק עבור $n=m$

$$\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,\frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}}\,dx$$

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n = \left[(x^2)^n\right]^{(2n)} = (2n)!$$

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{(2n)!\,(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx$$

נבדוק את האינטגרל

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx = \int_{-1}^{1}(x+1)^n(x-1)^n\,dx$$

נגדיר

$$\begin{cases} u = (x-1)^n \\ dv = (x+1)^n \end{cases}$$

ונקבל אינטגרציה בחלקים

$$\int_{-1}^{1}(x-1)^n(x+1)^n\,dx = (x-1)^n\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} - \frac{n(x-1)^{n-1}(x+1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

$$+\dots+(-1)^{n-1}\cdot n!\,(x-1)\frac{(x+1)^{2n}}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}\Big|_{-1}^{1}$$

$$+(-1)^n n!\int_{-1}^{1}\frac{(x+1)^{2n}}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}\,dx$$

מאחר התאפסות כל הביטויים שמופיע בחלק, כי האינטגרל הוא

$$\frac{(-1)^n n!\,(x+1)^{2n+1}}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}\Big|_{-1}^{1} = \frac{(-1)^n n!\,2^{2n+1}}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)(2n+1)}$$

נכפל מונה ומכנה ב- $n!$

$$= \frac{(-1)^n (n!)^2\,2^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\|P_n(x)\|^2 = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{(-1)^n(n!)^2\,2^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}$$

ב) נחשב את המקדם γ_n

$$P_n(x) = \gamma_n x^n + \dots + \gamma_0$$

$$\hat{P}_n(x) = \mu_n x^n + \dots + \mu_0$$

כלומר:

$$\frac{\gamma_n}{\|P_n(x)\|} = \mu_n$$

מתוך $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ נובע $\gamma_n = \frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}$

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \frac{d^n}{dx^n}\sum \frac{n!}{k!\,(n-k)!}(x^2)^{n-k}(-1)^k$$

$$= \sum \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2k}(-1)^k$$

$$= \sum (-1)^k \frac{n!}{k!\,(n-k)!}(2n-2k)\cdot\ldots\cdot(n-2k+1)\,x^{n-2k}$$

עבור התרומה הגדולה ביותר מתקבלת ל- $k=0$, ונשאר המחובר

$$\frac{n!}{0!\,n!}\cdot\frac{(2n)!}{n!}\cdot x^n$$

נכפול במקדם לפי נוסחת רודריגז

$$\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{(2n)!}{n!}x^n$$

$$\gamma_n = \frac{(2n)!}{2^n\cdot(n!)^2}$$

שעור ח

17.7.13

הקירוב הטוב ביותר

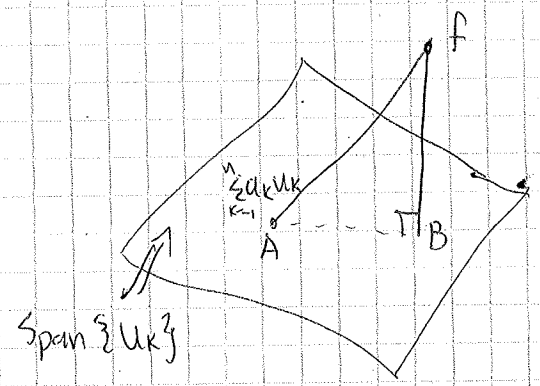
משפט: יהי f שייך למרחב הילברט $f\in H$, וקיימת מערכת אורתונורמלית $\{u_k\}$ עם מקדמי פוריה $c_k=\langle f,u_k\rangle$.

כמו כן נתון צירוף לינארי $\sum_{k=1}^{n} a_k u_k$.

נרצה למצוא $\arg\min_{a_k} \|f-\sum_{k=1}^{n} a_k u_k\|^2$

אזי מקבלים מינימום עבור $a_k=c_k$

הסבר: נתבונן בצורה גיאומטרית. נצייר את המישור כ- $\mathrm{Span}\{u_k\}$



כאומר, המינימום מתקבל עבור $a_k=c_k$, ומתקיים

$$\|f-\sum_{k=1}^{n} c_k u_k\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2\geq 0$$

$$\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2\leq\|f\|^2$$

ומתקיים לכל n, לכן הטור חסום $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\leq\|f\|^2$

משפט פישר-ריס: אם במרחב הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס,

אזי קיים $f\in H$ כך שהטור הינו טור פוריה של f והטור מתכנס ל- f.

ומכאן נובע שמרחב הילברט איזומטרי ל- L^2 או ל- ℓ^2.

הערה: הקשר נכון גם עבור מרחבים לא שלמים.

פתרונות מספר 5 - הקירוב הטוב ביותר

1) תהי $f \in CL^2[-\pi,\pi]$. לכל $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$ נגדיר

$$F(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \alpha - \beta\cos(x) - \gamma\cos(10x)|^2 dx$$

הוכח כי F מקבלת ערך הכי טוב ביותר בדיוק בנקודה $(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)$ ומצא נקודה זו.

נתון כי הבסיס הוא $\{1, \cos(x), \cos(10x)\}$ $\quad \langle f,g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g}\,dx$

נדרש למצוא את $(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)$ עבור המקרים:

א) $f(x) = \cos^2(x)$?

דהיינו, יש למצוא $\min_{\alpha,\beta,\gamma}\{\|f(x) - [\alpha + \beta\cos(x) + \gamma\cos(10x)]\|^2\}$

בתרגול: הוכחנו יש לבדוק כי תחת המכפלה הפנימית, הבסיס אורתונורמלי.

נעדיף לעבור עם בסיס אורתונורמלי.

$$\|1\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\cdot dx = 2 \quad \Rightarrow \quad \|1\| = \sqrt{2}$$

$$\|\cos(x)\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\,dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \|\cos(x)\| = 1$$

$$\|\cos(10x)\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(10x)\,dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \|\cos(10x)\| = 1$$

נעבור לבסיס אורתונורמלי $u = \{1/\sqrt{2}, \cos(x), \cos(10x)\}$

כעת, מכיוון שהבסיס אורתונורמלי, נמצא את (α,β,γ)

לפי מקדמי פורייה שמוכלות לנו שמגיעים למינימום.

$$f(x) = \cos^2(x) = c_1\cdot 1/\sqrt{2} + c_2\cos(x) + c_3\cos(10x)$$

$$c_k = \langle f, u_k\rangle$$

$$c_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos(2x)}{2\sqrt{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

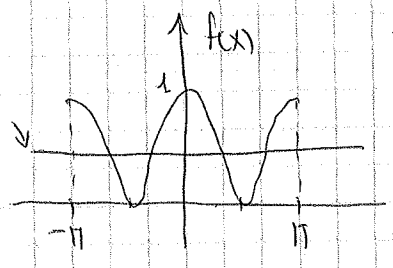
$$c_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\cdot\cos(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [1-\sin^2(x)]\cos(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{\sin^3(x)}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$c_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\cos(10x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [1-\sin^2(x)]\cos(10x)\,dx = \dots = 0$$

קיבלנו כי הקירוב הטוב ביותר מתקבל עבור

$$\alpha = 1/\sqrt{2} = c_1 \;;\; \beta = 0 = c_2 \;;\; \gamma = 0 = c_3$$

נתבונן בדוגמה שיטתית $y = f(x) = \cos^2(x)$.



הטלה הינו קו הבסיס בגוף

כאשר מתקבלים מערכות:

ב) יש לוודא כי אין תלות לינארית.

א) יש לוודא שהמערכת אורתוגונלית

ג) יש לוודא שהמערכת אורתונormלית.

<u>הבעיה אורתוגונליזציה - תהליך גרם שמידט</u>

דוגמה: נתבונן במערכת $\{1, \cos(x)\}$ מעל הקטע $[0, \pi/2]$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

$$v_1 = 1 \Rightarrow \|v_1\|^2 = \|1\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} 1^2\,dx = 1/2 \Rightarrow \|1\| = 1/\sqrt{2}$$

$$v_2 = \cos(x) - \langle \cos(x), \sqrt{2}\rangle \sqrt{2}$$

$$\langle \cos(x), \sqrt{2}\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sqrt{2}\cos(x)\,dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$$

$$v_2 = \cos(x) - (\sqrt{2}/\pi)\cdot\sqrt{2} = \cos(x) - 2/\pi$$

$$w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} \qquad \|v_2\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} [\cos(x) - 2/\pi]^2\,dx$$

דוגמא: שימוש בנוסחת נסיגה

נתבונן בנוסחת נסיגה עבור פולינום לגנדר מסדר I

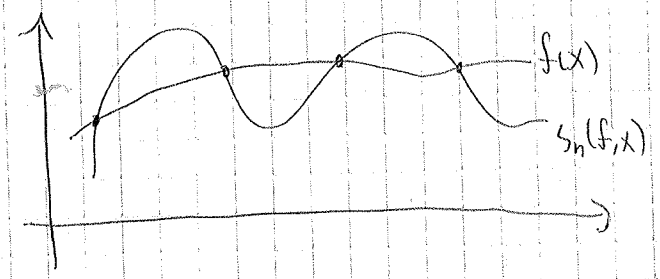
$$T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \end{cases}$$

עם תנאי ההתחלה.

בעיית פיקוח - המשמעות

נתונה פונקציה $f(x) \approx S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x)$



$S_n(f,x)$ - מכונת חלקי על מור בורייה לפי f.

בעיית פיקוח מבטיחה כי להפרש $f(x) - S_n(f,x)$ יש $n+1$ שינוי - סימן.

בעיה: לכל פונקציה $f(x)$, $f \in CL^2_{(a,b)}$ יש מור בורייה.

השאלה הוא המור המתכנס לפונקציה במידה שווה או בקירוב ממוצע.