פתרון

1. יהיו $(A,<_A),(B,<_B)$ שתי קבוצות זרות סדרות היטב. נגדיר יחס סדר $<$ על $A\cup B$ באופן הבא:
יהיו $x,y\in A\cup B$. אם $x,y\in A$ אז $x<y\iff x<_A y$. אם $x,y\in B$ אז $x<y\iff x<_B y$. ואם בה"כ $x\in A, y\in B$ אז $x<y$.
הוכיחו שזהו סדר טוב.
פתרון: תהי $C\subseteq A\cup B$. אם C מוכלת בA אז יש לC איבר ראשון בA, והוא יהיה גם האיבר הראשון ב$A\cup B$, מהגדרת הסדר על $A\cup B$.
כנ"ל לגבי המקרה ש$C\cup B$.
נניח ש $C\cap A\neq\emptyset$ כן $C\cap B\neq\emptyset$.
$A\supseteq C\cap A\neq\emptyset$ ולכן קיים $a\in C\cap A$ איבר ראשון ביחס לסדר על A. נוכיח שהוא איבר ראשון בC כתת קבוצה של $A\cup B$. ובכן, יהי $c\in C$. אם $c\in A$ אז $a<c$ בA ולכן ב $A\cup B$. אם $c\in B$ אז $a<c$ מהגרת הסדר על $A\cup B$. לכן aאיבר ראשון בC. מש"ל.
2. תהי A סדורה היטב. נסמן ב$A^{\mathbb{N}}$ את קבוצת הסדרות האינסופית מעל A. נגדיר יחס סדר על $A^{\mathbb{N}}$ באופן הבא: $(a_1,a_2,...)<(b_1,b_2,...)\iff a_i<b_i$ עבור $i=min\{j\in\mathbb{N},a_j\neq b_j\}$.
הוכח/הפרך: זהו סדר טוב.
פתרון: נשים לב לקיומה של הסדרה האינסופית היורדת הבאה: $\{f_i\}$ כאשר $f_i(n)=\begin{cases}1 & n=i\\ 0 & n\neq i\end{cases}$.
3. תהי A קבוצה סדורה, $B\subseteq A$ קופינלית בA, $C\subseteq B$ קופינלית בB. הוכיחו שC קופינלית בA.
פתרון: יהי $a\in A$. צ"ל שקיים $c\in C$ כך ש $a\leq c$.
B קופינלית בA ולכן יש $b\in B$ כך ש $a\leq b$. Cקופינלית בB ולכן יש $c\in C$ כך ש $b\leq c$. מטרנזיטיביות הסדר, $a\leq c$.
4. יהיו A,B סדורות היטב, ונניח שיש $f:A\to B$ איזומירפיזם סדר. הוכיחו שf יחידה.
פתרון: נניח שיש שני איזו' סדר $f,g:A\to B$. אז $g^{-1}:B\to A$ היא גם איזו' סדר. כמו כן, הרכבה של איזומורפיזמי סדר היא איזומורפיזם סדר. (בדקו והשתכנעו שאכן האוסף של איזומורפיזמי סדר סגור להרכבה ולהופכי.) כעת, $f\circ g^{-1}:B\to B$ הוא איזו' סדר מקבוצה סדורה היטב לעצמה, ולכן הזהות (לפי מה שהוכחנו בכיתה) וכן $g^{-1}\circ f:A\to A$ שווה לזהות. כלומר, f שווה להופכי של g^{-1}. במילים אחרות, $f=g$. מש"ל.

5. הוכח/הפרך: $\mathbb{R}\cong\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. (איזומורפיות סדר)
פתרון: נניח בשלילה שיש $f:\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$. נסתכל על $f[(0,1)]\subseteq\mathbb{R}$. $\Pi>(0,1)$ ולכן $f(\Pi)>f[(0,1)]$. לכן $f[(0,1)]$ היא קבוצה חסומה מלעיל ב$\mathbb{R}$. ידוע מאינפי 1 שלכל קבוצה חסומה מלעיל ב$\mathbb{R}$ יש חסם עליון. כלומר, לקבוצת חסמי המלעיל יש מינימום.

מכיוון ש $f:\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ איזומורפיזם סדר, אז $f(a)>f[(0,1)] \iff a>(0,1)$.
כלומר, אם נצמצם את הפו' רק לטווח של $\{a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}: a>(0,1)\}$ נקבל איזו' סדר בין חסמי המלעיל של $(0,1)$ לחסמי המלעיל של $f[(0,1)]$. אבל ב$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ אין מינימום לקבוצת חסמי המלעיל של $(0,1)$. סתירה.

6. הוכח/הפרך: יהיו A,B קבוצות סדורות. אם יש $f:A\to B$ שומרת סדר, ו$g:B\to A$ שומרת סדר, אז A וB איזומורפיות סדר.
פתרון: הפרכה: נקח: $A=[-1,1]$ ו$B=(1,1)$.
$f:A\to B$ שמוגדרת: $f(x)=x$ היא איזו' סדר. וכן $g:B\to A$ שמוגדרת $g(x)=\dfrac{x}{2}$ היא איזו' סדר. אולם A וB אינן איזומורפיות סדר, שכן לA יש איבר מינימום ולB אין.

7 . תהי A קבוצה סדורה היטב וB קבוצה כלשהי, ותהי $f:A\to B$ פונקציה על. הוכיחו שניתן להגדיר על B סדר טוב.
פתרון: נגדיר פונקציה $g:B\to A$ באופן הבא: $g(b)=\min\{a\in A: f(a)=b\}$.
נשים לב שמכיוון שf על לכל איבר בB יש מקור, ולכן קבוצת המקורות של כל איבר לא ריקה, לכן יש בה איבר ראשון. כעת נגדיר סדר על B באופן הבא: $b_1<b_2 \Leftrightarrow g(b_1)<g(b_2)$.
ראשית, נוכיח שזהו אכן סדר.
אנטי־רפלקסיביות: יהי $b\in B$. אז $g(b)<g(b) \iff b<b$. אבל $g(b)\in A$ ולכן מאנטי רפלקסיביות של הסדר על A לא מתקיים $g(b)<g(b)$.
טרנזיטיביות: נניח ש $b_1<b_2\wedge b_2<b_3$ זה אומר ש $g(b_1)<g(b_2)\wedge g(b_2)<g(b_3)$.
מטרנזיטיביות בA נקבל $g(b_1)<g(b_3)$ ולכן $b_1<b_3$/
סדר טוב: תהי $C\subseteq B$ תת קבוצה לא ריקה. נסתכל על $g[C]$, היא תת קבוצה לא ריקה בA ולכן יש בה איבר ראשון, a. טענה: $f(a)$ הוא איבר ראשון בC. הוכחה: ראשית צריך להראות ש $f(a)\in C$. ובכן, $a\in g[C]$ ולכן קיים $c\in C$ כך ש$a=g(c)$. מהגדרת g נקבל ש$c=f(a)$. כעת, יהי $b\in B$. אז $a<g(b)$, כלומר $g(c)<g(b)$. לכן $f(a)=c<b$ מש"ל.