דף תרגילים 2

גיאומטריה ווקטורית ב $\mathbb{R}^3$:

1. יהיו $c = (6,1,-4), b = (0,4,0.5), a = (2,3,-1)$

א. חשב את הזווית בין a ו b

$\langle a,b\rangle = 2\cdot 0 + 3\cdot 4 + 0.5\cdot -1 = 11.5,\ \|a\| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14},$

$\|b\| = \sqrt{0+16+0.25} = \sqrt{16.25} = \frac{\sqrt{65}}{2}$ ו-
$\frac{\langle a,b\rangle}{\|a\|\cdot\|b\|} = \frac{11.5}{\sqrt{14}\cdot\frac{\sqrt{65}}{2}} = \frac{23}{\sqrt{910}} = \sqrt{\frac{529}{910}}$

חישבתי $\arccos\sqrt{\frac{529}{910}}$ במחשבון ~40.32 מעלות או ~0.7037 רדיאנים

ב. חשב את שטח של המקבילית הנוצרת ע"י c ו- b.

למדנו נוסחא שלטח המקבילית הזאת, $\|b\times c\|$.

$$b\times c = (4\cdot(-4) - 0.5\cdot 1, 0.5\cdot 6 - (-4)\cdot 0, 0\cdot 1 - 4\cdot 1) = (-16.5, 3, -4)$$

$$\|b\times c\| = \sqrt{272.25 + 9 + 16 = 297.25} \sim 17.24$$

ג. הראה ש a, b ו- c נמצאים באותו המישור.

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 0.5 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix} = 6\det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0.5 \end{pmatrix} - 1\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} + (-4)\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= 6\cdot 5.5 - 1\cdot 1 - 4\cdot 8 = 33 - 1 - 32 = 0$$

הדטרמיננטה שווה 0 אם ורק אם הוקטורים תלויים ליניארית (ששקול לכך שהם באותו מישור)

2. יהיו a,b,c,d ווקטורים ב-$\mathbb{R}^3$. הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. $a\times(b\times c) = \langle a,c\rangle b - \langle a,b\rangle c$

אני מציע להשתמש בהוכחה אלגברית – לחשב את שני הביטויים לפי מקדמים ולהראות שהם שווים. אני לא יכול להסביר הוכחה גיאומטרית בלי איורי תלת מימד מסובכים, והוכחות כאלה יכולות להיות מסובכות מאוד.

נסמן $a = (a_1,a_2,a_3)$ וכדומה. $b\times c = (b_2c_3 - b_3c_2, b_3c_1 - b_1c_3, b_1c_2 - b_2c_1)$ ו-

$$\begin{aligned} a\times(b\times c) &= \big(a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3), a_3(b_2c_3 - b_3c_2) \\ &\quad - a_1(b_1c_2 - b_2c_1), a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2)\big) \\ &= (a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3, a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 \\ &\quad + a_1b_2c_1, a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2) \\ &= \big(b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3), b_2(a_1c_1 + a_3c_3) \\ &\quad - c_2(a_1b_1 + a_3b_3), b_3(a_1c_1 + a_2c_2) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2)\big) \\ &= \#\big(b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \\ &\quad - c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3), b_2(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \\ &\quad - c_2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3), b_3(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \\ &\quad - c_3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\big) \\ &= (b_1\langle a,c\rangle - c_1\langle a,b\rangle, b_2\langle a,c\rangle - c_2\langle a,b\rangle, b_3\langle a,c\rangle - c_3\langle a,b\rangle) \\ &= \langle a,c\rangle b - \langle a,b\rangle c \end{aligned}$$

בשיוויון שסימנתי ב- # הוספתי והורדתי $a_1b_1c_1$ מהאיבר הראשון של הווקטור, $a_2b_2c_2$ מהאיבר השני ו-$a_3b_3c_3$ מהשלישי, יתר השיוויונות מידיים.

ב. $\langle a\times b, c\times d\rangle = \langle a,c\rangle\langle b,d\rangle - \langle a,d\rangle\langle b,c\rangle$

$$\begin{aligned}\langle a\times b, c\times d\rangle &= \langle (a_2b_3-a_3b_2, a_3b_1-a_1b_3, a_1b_2-a_2b_1),(c_2d_3-c_3d_2, c_3d_1\\&\quad -c_1d_3, c_1d_2-c_2d_1)\rangle\\&=(a_2b_3-a_3b_2)(c_2d_3-c_3d_2)+(a_3b_1-a_1b_3)(c_3d_1-c_1d_3)\\&\quad+(a_1b_2-a_2b_1)(c_1d_2-c_2d_1)\\&=a_2b_3c_2d_3+a_3b_2c_3d_2-a_2b_3c_3d_2+a_3b_2c_2d_3+\cdots\\&=\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{3}a_ic_ib_jd_j-\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{3}a_id_ib_jc_j=\#\sum_{i,j=1}^{3}a_ic_ib_jd_j-\sum_{i,j=1}^{3}a_id_ib_jc_j\\&=\sum_{i=1}^{3}a_ic_i\sum_{j=1}^{3}b_jd_j-\sum_{i=1}^{3}a_id_i\sum_{j=1}^{3}b_jc_j=\langle a,c\rangle\langle b,d\rangle-\langle a,d\rangle\langle b,c\rangle\end{aligned}$$

ב-... אתם יכולים למצוא לבד את הסכום. בשיוויון שסימנתי ב- # הוספתי והורדתי $\sum_{i=1}^{3} a_ic_ib_id_i$ מהביטוי.

3. יהיו a, b שני ווקטורים אורתונורמליים ב-$\mathbb{R}^3$. הראה ש:

א. הווקטורים $a, b, a\times b$ מהווים בסיס אורתונורמלי ב-$\mathbb{R}^3$

אורטוגונליות:

$a\perp b$ כי a, b אורתונורמלים. לפי תכונות מכפלה וקטורית תמיד $a\times b\perp b$ ו- $a\times b\perp a$

נורמליות:

$\|a\|=\|b\|=1$ כי a, b אורתונורמלים, למדנו ש- $\|a\times b\|=\|a\|\cdot\|b\|\cdot\sin\theta$ כאשר θ היא הזווית בין a ל- b. בגלל ש- $a\perp b$ הזווית הזאת היא $90°$ ולכן $\|a\times b\|=1\cdot 1\cdot\sin 90°=1$.

ב. $(a\times b)\times a=b$, $(a\times b)\times b=-a$ והסבר את המשמעות הגיאומטרית.

לפי 2.א' $(a\times b)\times a=-a\times(a\times b)=-(\langle a,b\rangle a-\langle a,a\rangle b)=-(0\cdot a-1\cdot b)=b$ ו- $(a\times b)\times b=-b\times(a\times b)=-(\langle b,b\rangle a-\langle b,a\rangle b)=-(1\cdot a-0\cdot b)=-a$.

מבחינת המשמעות הגיאומטרית, גילינו ב-א' ש- $\{a,b,a\times b\}$ בסיס אורתונורמלי, אבל מכך נובע שהזוגות $\{a,a\times b\}$ ו- $\{b,a\times b\}$ גם אורתונורמליים.

מזה ש- $\{a,a\times b\}$ אורתונורמלי נובע לפי א' ש- $\{a,a\times b,(a\times b)\times a\}$ בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^3$, בפרט $(a\times b)\times a$ באורך 1 ומאונך ל- a ו- $a\times b$, כמו b, וזה מכריח את $(a\times b)\times a$ להיות שווה ל- b או $-b$. מסיבות דומות $(a\times b)\times b=\pm a$. בחירת הסימן נובעת הבורג הימני, אני צריך להדגים בכיתה. הסבר חלופי שאני יכול להעלות פה, אבל הוא יהיה לכם קצת פחות אינטואיטיבי, הוא לפי דטרמיננטה.

לקבל את המטריצה $\begin{pmatrix}- & b & -\\ - & a\times b & -\\ - & a & -\end{pmatrix}$ מ- $\begin{pmatrix}- & a\times b & -\\ - & a & -\\ - & b & -\end{pmatrix}$ ע"י החלפת שורות פעמיים ולכן $\det\begin{pmatrix}- & a\times b & -\\ - & a & -\\ - & b & -\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}- & b & -\\ - & a\times b & -\\ - & a & -\end{pmatrix}$ ולפי תכונות מכפלה וקטורית הדטרמיננטה השנייה שווה ל-1. מאותה תכונה $1=\det\begin{pmatrix}- & (a\times b)\times a & -\\ - & a\times b & -\\ - & a & -\end{pmatrix}$ ולכן $(a\times b)\times a$ חייב להיות שווה ל- $+b$ ולא $-b$ (אחרת הדטרמיננטה הייתה נותנת -1). בדומה, במקרה האחר מחליפים שורה אחת לקבל

$$\det\begin{pmatrix}- & (a\times b)\times b & -\\ - & a\times b & -\\ - & b & -\end{pmatrix}=-1=-\det\begin{pmatrix}- & a\times b & -\\ - & a & -\\ - & b & -\end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix}- & a & -\\ - & a\times b & -\\ - & b & -\end{pmatrix}$$

ולכן $(a\times b)\times b=-a$

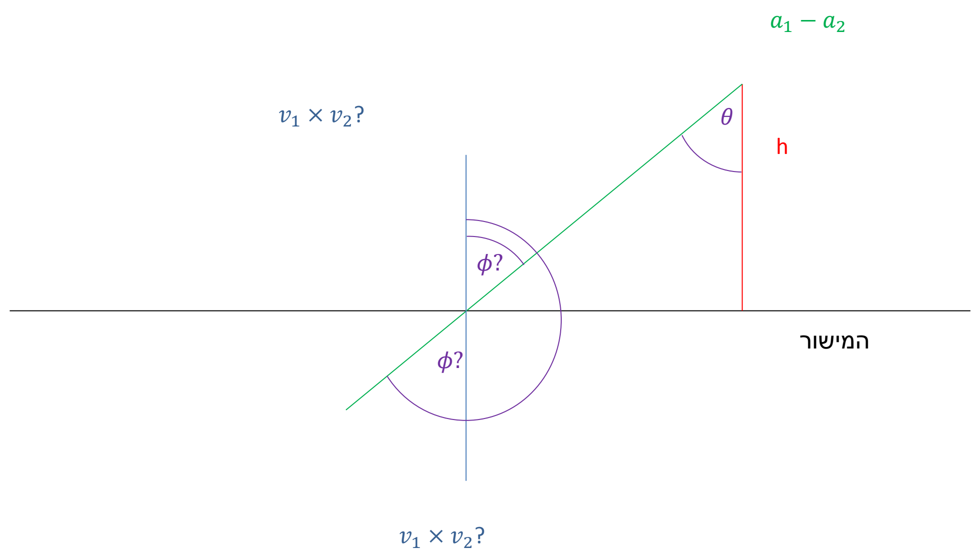
4. יהיו l_1 ו-l_2 שני ישרים במרחב $\mathbb{R}^3$ שאינם מקבילים. v_1 ווקטור שכיוונו ככיוון הישר l_1 ו-v_2 ווקטור שכיוונו ככיוון הישר l_2. a_1 נקודה שנמצאת על הישר l_1 ו-a_2 נקודה שנמצאת על הישר l_2.
הראה שהמרחק בין שני הישרים מתקבל ע"י הנוסחא: $d = \frac{|\langle a_1 - a_2, v_1 \times v_2 \rangle|}{\|v_1 \times v_2\|}$
תזכורת: מרחק בין שני ישרים מצטלבים במרחב מוגדר להיות המרחק בין הישר הראשון למישור שמכיל את הישר השני ומקביל לישר הראשון.

צריך להסביר את השאלה הזאת.
המרחק בין שתי נקודות x, y במקחב הוא הוא $|x-y|$.
אם יש לנו שני ישרים במרחב $a_1 + tv_1$ ו- $a_2 + sv_2$ כדי למצוא את המרחק בניהם צריך למצוא את שתי הנקודות (אחת על כל ישר) שהכי קרובות זו לזו. ולכן הנוסחא למרחק היא

$$\min_{s,t\in\mathbb{R}} |(a_1 + tv_1) - (a_2 + sv_2)| = \min_{s,t\in\mathbb{R}} |(a_1 - a_2) - (sv_2 - tv_1)|$$
$$= \min_{s,t\in\mathbb{R}} |(a_1 - a_2) - (tv_1 + sv_2)|$$

בשיוויון האחרון החלפנו את t ב- $-t$, בגלל שזה מינימום על כל $t \in \mathbb{R}$ זה לא יעשה הבדל בתוצאה.
הנוסחא שקיבלנו שווה לנוסחא למינימום המרחק בין הנקודה $a_1 - a_2$ לבין המישור הקנוני $tv_1 + sv_2$.

אם נצייר אנך שיורד מהנקודה $a_1 - a_2$ למישור $tv_1 + sv_2$ לפי הציור הבא, נראה שהאורך של האנך h שווה לאורך של ההישר בין $a_1 - a_2$ ל-0 (שהוא $\|a_1 - a_2\|$) כפול קוסינוס הזווית θ (אז המרחק שאנחנו מחפשים הוא $\|a_1 - a_2\| \cos\theta$).



נסמן את הווקטור $v_1 \times v_2$ באיור, גם הוא מאונך למישור $tv_1 + sv_2$ (תכונות של מכפלה וקטורית). יש שתי אפשרויות לכיוון ווקטור הזה ולכן ציירתי שתי אופציות (אחד מצביע למעלה והאחר למטה). הזווית ϕ בין $v_1 \times v_2$ לישר בין $a_1 - a_2$ ל-0 שווה ל- θ או $\theta + 180°$ ובכל מקרה

$$\cos\theta = |\cos\phi| = \left|\frac{\langle a_1 - a_2, v_1 \times v_2 \rangle}{\|a_1 - a_2\| \cdot \|v_1 \times v_2\|}\right| = \frac{|\langle a_1 - a_2, v_1 \times v_2 \rangle|}{\|a_1 - a_2\| \cdot \|v_1 \times v_2\|}$$

ולכן המרחק שאנחנו מחפשים, $\|a_1 - a_2\| \cos\theta$, שווה ל- $\frac{|\langle a_1 - a_2, v_1 \times v_2 \rangle|}{\|v_1 \times v_2\|}$.

סכומי איינשטיין

5. כתוב בצורה מלאה את הסכום הנתון בסימון איינשטיין: ($i, j \in \{1,2,3\}$)

א. $a_j^i b_k^j c_s^k$

בגלל שהמקדמים j ו- k מופיעים למעלה ולמטה יש לסכום עליהם, המקדמים i ו- s לא עושים זאת ולכן לא סוכמים עליהם. הפתרון הוא עם כן $\sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} a_j^i b_k^j c_s^k$.

ב. $a_{ij} x^i x^j$

המקדמים i ו- j מופיעים למעלה ולמטה ולכן יש לסכום עליהם. הפתרון הוא עם כן $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x^i x^j$.

ג. $\delta_{ij} a^{ij}$.

המקדמים i ו- j מופיעים למעלה ולמטה ולכן יש לסכום עליהם, מה שנותן את הביטוי $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} a^{ij}$.
עבור $i \neq j$ $\delta_{ij} = 0$ ולכן הסכום שווה ל- $\sum_{i=1}^{3} \delta_{ii} a^{ii} = \sum_{i=1}^{3} a^{ii} = \mathrm{Tr}(A)$ עבור $A = \left(a^{ij}\right)$.

6. תהיינה A, B מטריצות ריבועיות, הוכח, בעזרת סימוני הסכימה של איינשטיין $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$
כמו שלמדנו, להוכחות כאלה כדאי לסמן את המטריצה עם אינידקטור אחד למעלה ואחד למטה, למשל $A = \left(A_j^i\right)$ (i מסמן שורה ו- j עמודה). בניסוח הזה אם $C = AB$ אז $C_j^i = A_k^i B_j^k$ ולכן $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(C) = C_i^i = A_k^i B_i^k$. בדומה $\mathrm{Tr}(BA) = B_k^i A_i^k$ וזה כמובן שווה ל- $\mathrm{Tr}(AB) = A_i^k B_k^i$.

7. הוכח שפעולת כפל מטריצות הינה דסטרביוטיבית (סמן בסכימת איינשטיין)

$$\left(A(B+C)\right)_j^i = A_k^i (B+C)_j^k = A_k^i \left(B_j^k + C_j^k\right) = A_k^i B_j^k + A_k^i C_j^k = (AB)_j^i + (AC)_j^i = (AB+AC)_j^i$$

8. תהיי δ_j^i פונקצית דלתא של קרונקר $i, j = 1,2, \ldots, n$ הערך את הביטוי $\delta_j^i \delta_k^j \delta_i^k$ (הנתון בסימוני איינשטיין).

לפי הגדרת פונקצית דלתא של קרונקר האיבר δ_j^i הוא המקדם ה- i, j של מטריצת היחידה $I \in M_{n\times n}$ (1 אם $i = j$ ו- 0 אחרת). $I^2 = I$ לפי נוסחאת כפל מטריצות $\delta_j^i = I_j^i = I_k^i I_j^k = \delta_k^i \delta_j^k$ לכל i, j. בפרט $\delta_j^i \delta_k^j \delta_i^k = \left(\delta_j^i \delta_k^j\right) \delta_i^k = \delta_k^i \delta_i^k = \delta_i^i = I_i^i$ וזה, כזכור, שווה ל- $\mathrm{Tr}(I)$ ששוה ל- n.