(1c) $X = \ell_\infty^{(2)}$ $\quad Y = C[0,1] \supset \{x(t) = at+b \ ; \ a,b \in \mathbb{R}\}$ (1)

$$at+b \longmapsto (a+b, b)$$

$\|at+b\| = a \overset{\text{abs}}{\vee} b \qquad \|a+b, b\| = a \overset{\text{abs}}{\vee} b$ נורמה נשמרת:

$\max\limits_{\text{אם } \leq \text{ אז}} |x(t)| = \max\{x(0), x(1)\}$

(2) $X = \ell_2^{(2)} \qquad Y = \{x(t) = a\sin(t) + b\cos(t) \ : \ a,b \in \mathbb{R}\} \subset C_2[-\pi,\pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a^2\sin^2(t) + \underbrace{2ab\sin(t)\cos(t)}_{0 \text{ - מתאפס}} + b^2\cos^2(t)\,dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}dt + b^2\int_{-\pi}^{\pi}\tfrac{1}{2}\,dt = \pi(a^2+b^2) \Rightarrow \|x(t)\| = \sqrt{\pi(a^2+b^2)}$$

$\cos t \mapsto (\sqrt{\pi}, 0) \quad , \quad \sin t \mapsto (0, \sqrt{\pi})$

$a\sin(t) + b\cos(t) \longmapsto (\sqrt{\pi}a, \sqrt{\pi}b) \qquad \det\begin{pmatrix}\sqrt{\pi} & 0 \\ 0 & \sqrt{\pi}\end{pmatrix} \neq 0$

(3) $X = C[0,1] \qquad Y = C[2,5] \qquad Y \mapsto X$

$x(t) \longmapsto x(3t+2)$ טרנספורמציה לינארית, משמרת נורמה

• חח"ע ועל נראה ע"י הפונקציה ההפוכה

$$\phi(t) \in C[0,1] \longmapsto \phi\left(\tfrac{t-2}{3}\right) \in C[2,5]$$

$C[2,5] \overset{\psi}{\longmapsto} C[0,1] \qquad f(t) \longmapsto g(t) = f(3t+2)$

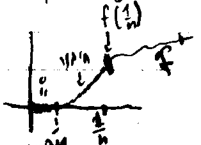
$\psi\phi = id$

(2) קבוצה סגורה: (1) C הוא מרחב שלם (2) $\bar{A} = \bigcap\limits_{A \subset F} F$ $\quad A \cup \{$כל הגבולות של סדרות מתכנסות$\}$

נתון: $\{f(t) \in C[0,1] \ , \ x(0) = x'(0) = 0\} = A$

נניח ש $x_n \to x$ מהו x?

• נוכיח ש $B = \{x \in C[0,1]; x(0) = 0\}$ קבוצה סגורה. יהי $\|f_n \to f\|_\infty = 0$ כלומר מתכנסת במ"ש לכן $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = f(0) = 0$ כי יש התכנסות נקודתית.



• נוכיח ש כל איבר f ב B הוא גבול של סדרה ב A

נתון f נגדיר פונקציה $g_n(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2n} \\ 2n\left(t - \frac{1}{2n}\right)f\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2n} & \frac{1}{2n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ f(t) & \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$ נראה ש $g_n \to f$

g_n הגדרנו את f לא להיות שונה ממנה רק בקטע עד $\frac{1}{n}$ נבחר n גדול מספיק ולכן ע"י... $\|g_n - f\| < \varepsilon$

א. (3) • $\|x\| \ge 0$ $\|x\|\neq 0$ אם $x\neq 0$

• $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$

• $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

ב. אם $f_n \to f$ במ"ש, $f_n' \to f'$

<u>עבור שלמות</u>   סדרת קושי $\{f_n\} \in X$

$\downarrow$

מתכנסות בנורמה $\{f_n'\} \subset C[0,1]$ קושי

$C[0,1]$ מרחב שלם לכן $\lim f_n' \overset{\text{במ"ש}}{=} f' \in C[0,1]$

נרצה להוכיח ש $f = a_j + \int_0^x f(t)dt$

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = \lim f_n(0) + \max_{t\in[0,1]} f_n'(t) - f(0) + \cancel{\max f'(t)} = 0$$

ספרבילי: תת קבוצה מוכלת בקבוצה ספרבילית

(4) • לא איזומטריים כי כלל מקביליות לא מתקיים ב l_p ו $C[0,1]$ וב l_2 מתקיים. נבדוק את (e_1,e_2) $a=e_1,\ b=e_2$

$$2\|a\|^2+2\|b\|^2 = \|b+a\|^2 + \|b-a\|^2$$

(5) (א) ב l_2 מרחב שלם $|a_i^n - a_i|^2 \le \|a^n - a\| \to 0$

הגבול קיים ב l_2 והוא שייך ל E

(ב) $y \in E^\perp \Rightarrow \langle e_{2j}+e_{2j+1}, y\rangle = 0$

$\Rightarrow \sum y_{2j} + y_{2j+1} \Rightarrow y_{2j} = -y_{2j-1}$

$\Rightarrow E^\perp = \{x : x(2j) = -x(2j-1)\}$

(ג) ב l_2 היטל נחפש את הקירוב הטוב ביותר

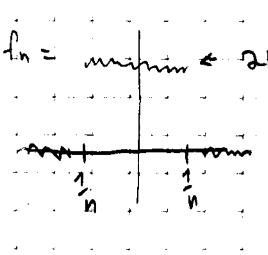
$$(a,b,0,\dots,0) = \underbrace{\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, 0, 0 \dots\right)}_{\in E} + \left(\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}, 0,0,0\right)$$

(6) (א) • זוהי סדרה שאין לה תת סדרה מתכנסת ב $C[0,1]$ $\{t^n\}$ ולכן לא קומפקטית • זו גם לא מעטפה רדופה כמ"ז => לא אורזלה

לא סגרה קומפקטית => לא קומפקטית

(ב) $f_n =$ ← $2n$ $\int |f_n\, dt| \le 1$

$\|f_n - f_m\| \neq 0$



בסוף

(13) ב. $\varphi(x) = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{(-1)^K x(\frac{1}{K})}{K^2}$, $C[0,1]$ חשב את הנורמה של

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^K x(\frac{1}{K})}{K^2} \le \sum_{K=1}^{\infty} \frac{x(\frac{1}{K})}{K^2} \le \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^2} \quad (*)$$

$$X_N(t) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{2n} = t \\ -1 & \frac{1}{2n-1} = t \end{cases} \qquad \Rightarrow \|\varphi\| = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^2}$$

נרצה להראות שקיימת פונקציה שמשווה ממש ל (*)
ומצאנו אותה היא $x_N(t)$

ובינייהם השלמה "חלקה"

כדי להיות שייכים ל $C[0,1]$ צריך להיות רציפים ב-0

ו N קובע שאיבה אינטרוול $[-N,N]$ הפונקציה צריכה שווה 0.

(16) א. $(Ax)(j) = \frac{2j-1}{j+1} x(j)$ חשב נורמה של האופרטור ב l_2

$\|A\| = \sup_{\|X\| \le 1} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$ נרצה למקסם את $\|Ax\|$ ל $\|X\| = 1$

$\|X\| = 1 \Rightarrow \sum a_K^2 < 1$

עבור מרחב הילברט עם בסיס א"נ קיים אופרטור אלכסוני כלומר מהצורה

$\|A\| = \sup |\lambda_n|$ אז $A := \sum C_K e_n \to \sum \lambda_n C_n e_n$

ד. $\|A\| = \text{esential} \sup \varphi(t) = 1\frac{1}{2}$

ה. $\forall g \; \|Ag\|_{C(I)} = \sup_{S \in I} \left| \int_0^S g\,dt \right| \le \sup_{S \in I} \int_0^S |g|\,dt \le \sup_{S \in I} \int_0^S 1\,dt = 1$

$\Rightarrow \|A\| = 1$

(17) א. $(A_n x)(j) = \frac{n}{n+j} x(j)$ l_2

אופרטור הזהות $A = I$

$\forall x \quad \|A_n(x) - A(x)\| = \sum_{j=1}^{\infty} \left[[A_n(x)]_j - [A(x)]_j \right]^2$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n}{n+j} x(j) - x(j) \right]^2 = \lim \sum_{j=1}^{\infty} \left[x(j) \left(\frac{j}{n+j} \right) \right]^2 \le \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \left[x^2(j) \left(\frac{j}{n+j-n} \right)^2 \right]}_{*}$$

$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x^2(j) < \infty$

קיים N_0 כך ש $\sum_{j=N+1}^{\infty} * < \frac{\varepsilon}{2}$ (זנב מתכנס שואף ל 0)

לכל N_0 $\sum_{N+1}^{\infty} x_j^2 < \frac{\varepsilon}{2}$ $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+j} \right)^2 x_j^2$ ← קבוע (!) n N

$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{N_0} \left(\frac{j}{n+j} \right)^2 x_j^2 \longrightarrow 0$

$\|A_n e_n - Ae_n\| = \left\| \frac{n}{n+n} e_n - e_n \right\| \overset{\text{בנורמה}}{=} \left\| \frac{1}{2} e_n - e_n \right\|$

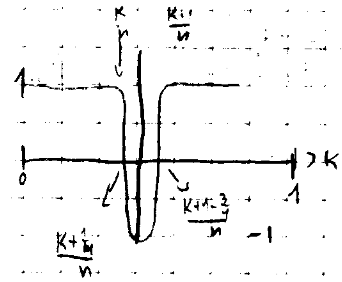
$= \frac{1}{2} \; \not\to 0 \quad \Rightarrow$ אין התכנסות בנורמה

(17) (ב) ב $C[0,1]$ נסמן $A_n f$ את הפונקציה רציפה
המתלכדת עם f בנקודות $t=\frac{k}{n}$ עבור $0\le k\le n$
וליניארית בכל אחד מקטעים $[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$ עבור $1\le k\le n$.

הסבר: ב הנקודות $\frac{k}{n}$ ברור ש $\|A_n(f)-I(f)\|=0$
בנקודות האחרות הנגזרות חסומות ולכן תמיד קיים קטן כרצוננו $\|A_n(f)-I(f)\|<\varepsilon$ ש
התכנסות נקודתית $A=I \Leftarrow \quad \|A_n(f)-I(f)\|<\varepsilon \Leftarrow$

$$\|A_n(f)-I(f)\| = \sup_{t\in I}|A_n(f)-I(f)|$$

בנורמה: נקח $f=1$ $\quad A_n(f)$



נקבל ש $\|A_n-f\| = \sup\|A_n(f)-f\| = 2$

(18) $n=1$: ברור

הנחת האינדוקציה מתקיים עבור n

$$K_n(\sigma,t) = \frac{(\sigma-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\int_0^s K(s,t)f(t)dt = \int_0^1 \tilde{K}(s,t)f(t)dt \qquad \tilde{K}(s,t)=\begin{cases}0 & s<t\\ K(s,t) & s>t\end{cases}$$

$$A(A_n f)(s) = A\left(\int_0^\sigma K_n(\sigma,t)f(t)\,dt\right)(s)$$

$$= \int_0^s (s-\sigma)\left[\int_0^\sigma K_n(\sigma;t)f(t)\,dt\right]d\sigma$$

$$= \int_0^1\underbrace{\left[\int_0^1 \underbrace{(s-\sigma)}_{\tilde{K}} K_n(\sigma;t)\,d\sigma\right]}_{\tilde{K}_{n+1}} f(t)\,dt \qquad s>\sigma \quad t>\sigma$$

$$\tilde{K}=\begin{cases}(s-\sigma) & s<\sigma\\ 0 & s>\sigma\end{cases}$$

$$\tilde{K}_n = 0 \quad \sigma>t$$

$\sigma = \theta - 1$
$K = 0 \cdot c$

$$K_{n+1} = \int_s^t \underbrace{(s-\sigma)}_{g}\underbrace{\frac{(\sigma-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}}_{f'}d\sigma = fg\Big|_s^t + \int_s^t \frac{(\sigma-t)^{2n}}{2n!}d\sigma$$

$$= \frac{(\sigma-t)^{2n+1}}{2n!\,(2n+1)}\Bigg|_s^t = \frac{(s-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

המשך (18) $\|A^n\|_{L_2} \le \gamma \|f\| = \sqrt{\iint_{I\times I} K^2(s,t)\,dt\,ds}$ בסדר

$C(I)$ $\|A^n f\| = \sup_{\|f\|=1} \left| \int_0^s \frac{(s-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(t)\,dt \right| \le \sup \left| \int_0^s \frac{f(t)}{(2n-1)!}\,dt \right|$

$\forall f$

$\le \sup \int_0^s \left| \frac{1}{(2n-1)!} \right| \le \frac{1}{(2n-1)!}$

L_2 $\sqrt{\iint_{I\times I} K^2(s,t)\,dt\,ds} = \sqrt{\iint_{I\times I} \left(\frac{(s-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} \right)^2 dt\,ds}$

$\le \frac{1}{(2n-1)!}$. כי על התחום $I\times I$ זה חסום ע"י 1 והחלקים מוגדרים 0.

(ב) $Af = f - 1$ צ"ל

$\Downarrow$

$\|A\| < 1$ הפיך כי $I - A$ $(I - A)f = 1$

$\Rightarrow f = (1 + A(1) + A^2(1) + A^3(1) + \dots)$

(19) (א) $AX = (x_2, x_1, x_4, x_3, \dots)$ ℓ_2

• ע"ע $AX = \lambda X \Rightarrow \begin{cases} x_{2n-1} = \lambda x_{2n} \\ x_{2n} = \lambda x_{2n-1} \end{cases} \Rightarrow x_{2n-1} = \lambda^2 x_{2n-1} \Rightarrow \lambda = \pm 1 \Rightarrow x_{2n} = \pm x_{2n-1}$ וק"ע

$\Leftarrow$ ה-spec יכול להיות בתוך גבול וכול להיות גם לא המספר הנמצאים בגבול הרציף

• ע"פ משפט אם $|\lambda| > \|A\|$ אז λ ערך רגולרי נחשב $\|A\|$

$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|AX\| = \sup_{\sum x_i^2 = 1} \|Ax\| = 1$ (יקטין סדרתית)

$\Rightarrow |\lambda| > 1$ ערכים רגולריים

נניח λ לא ע"ע • $(A - \lambda I)f = g$ - שפותר את המשוואה f קיים g ונראה בהינתן שלכל נניח λ אינו ע"ע.

$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ נחשב למקרה הפרטי | חח"ע ולכן על $(A - \lambda I)$ $\Leftarrow$ לא ע"ע ולכן בספקטרום λ

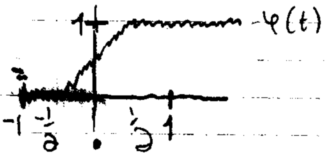
$\det(*) = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda \ne \pm 1 \Rightarrow$ הפיכה $\Rightarrow spec = \{\pm 1\}$

ואחרת לא הפיכה

$\Downarrow$

חח"ע ולכן k

(19) ⓐ $\varphi(t) =$



ג. $C[-1,1]$ וב $L_2[-1,1]$

$(Af)(t) = \varphi(t)\,f(t)$

$A: f(t) \mapsto \varphi(t)\,f(t)$ $\quad \|A\| = \text{ess}\sup|\varphi(t)| = 1$

ערכים רגולריים $|\lambda| > 1$

• ע״ע - נניח שקיים f כך ש $Af = \lambda f$ כלומר $\varphi(t)f(t) = \lambda f(t)$

$\Rightarrow \; f(t)\left(\varphi(t)-\lambda\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0 \quad f(x) = 0 \quad x > -\frac{1}{2}$

$\lambda = 1 \quad f(x) = 0 \quad x < \frac{1}{2}$

שאר התחום מה שנשאר

• $(\varphi(t)-\lambda)f(t) = g(t) \Rightarrow f(t) = \dfrac{g(t)}{\varphi(t)-\lambda}$

עבור $|\varphi(t)-\lambda| \to 0$ ⇐ $\frac{1}{\varphi(t)-\lambda} \notin op(X)$

עבור $\lambda < 0$ אז $\frac{1}{\varphi(t)-\lambda} \in op(x)$ ⇐ λ לא שייך ל spec כי הפיך

עבור $\lambda \in (0,1)$ קיימת נקודה t כך ש $\varphi(t) = \lambda$

ואז $\frac{1}{\varphi(t)-\lambda} = \infty$ ולכן שייך [illegible] ושייך ל spec

(20) $\int_0^{\pi/2} \cos(s-t)\,f(t)\,dt$

$\int_0^{\pi/2}\left[\cos(s)\cos(t) + \sin(s)\sin(t)\right]f(t)\,dt = \cos(s)\int_0^{\pi/2}\cos(t)f(t)\,dt + \sin(s)\int_0^{\pi/2}\sin(t)f(t)\,dt$

$\Rightarrow \varphi(x) = \text{span} \subseteq \text{span}\{\cos(s), \sin(s)\} \Rightarrow$ לכן אופרטור ממימד סופי

הספקטרום שווה ל $\{\lambda_1, \lambda_2, 0\}$ כאשר ~~[illegible]~~ ע״ע המטריצה A ואז נמצא את הע״ע

$A\cos(s) = \int_0^{\pi/2}\cos(s-t)\cos(t)\,dt =$

$\cos(s)\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt + \sin(s)\int_0^{\pi/2}\cos(t)\sin(t)\,dt$

$= \cos(s)\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(2t)+1}{2} + \sin(s)\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2t)}{2}\,dt$

$= \frac{\pi}{4}\cos(s) + \frac{1}{2}\sin(s)$

$A\sin(t) = \int_0^{\pi/2}\cos(s-t)\sin(t)\,dt = \frac{\pi}{4}\sin(s) + \frac{1}{2}\cos(s)$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{פולינום אופייני}} (\tfrac{\pi}{4}-\lambda)^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{2}\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0$

תש"פ

① $\left\| \sqrt[p]{\sum |x_i|^p} - \max(x_i) \right\| \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$ $\qquad X=\max$

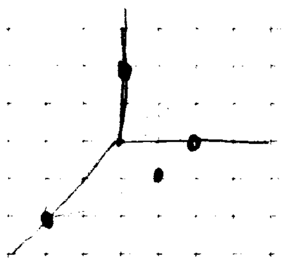
$$\le \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |\max(x_i)|^p} = \sqrt[p]{n}\,X \xrightarrow[p\to\infty]{} X =$$

$$\sqrt[p]{n X^p}$$

$$\left| \sqrt[p]{\sum |x_i|^p} \right| \ge \left| \sqrt[p]{\max |x_i|^p} \right| = \max(x_i) = X$$

$$\Rightarrow \lim_{p\to\infty} \|X\|_p = \|X\|_\infty$$

② 8 פאות $\qquad x_1+x_2+x_3=1$



③ ℓ^p $p<\infty$ ספרבילי

נקח $E=\{r_1,r_2,\dots r_n,0,0,\dots\}$ כל הקבוצות הסופיות שבהן

אם פרט למספר סופי של איברים $r_i\in\mathbb{Q}$ $\qquad$ $\forall\varepsilon\ \forall b\in\ell^p$

◦ איחוד של קבוצות בנות מנייה הוא גם מנ"ה $\qquad$ $\exists a\in E:\ |a-b|<\varepsilon$

• קיים N כך שהזנב מתכנס: $\qquad \sum_{N+1}^{\infty} |b_i| < \frac{\varepsilon^p}{2}$

קיימים $q_i\in\mathbb{Q}$ כך ש $|q_i-a_i|^p \le \frac{\varepsilon^p}{2N}$

$$\|b-a\| \le \sqrt[p]{\frac{\varepsilon^p}{2N}+\frac{\varepsilon^p}{2}} = \sqrt[p]{\varepsilon^p} = \varepsilon$$

④ ℓ^∞ מרחב שלם

תהי $\{X\}$ סדרת קושי מתכנסת ל- ונוכיח ש $X\in\ell^\infty$ נוכיח ש

מתכנס $\{x_i\}$ $\Leftarrow$ סדרת קושי $\{x_i\}$ $\Leftarrow$ $\|X^n-X^m\| = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i^n - x_i^m|$

כי בממשיים כל סדרת קושי מתכנסת

נקרא לגבול y ונוכיח ש $X^n \to y$ $\qquad \{x_i^n\}\to y_i$

צ"ל: $\qquad \lim_{n\to\infty} \|X^n - y\| = 0$

נבחר N כך ש לפי קושי $\|X_n-X_m\|<\varepsilon \Rightarrow \sup_i |x_n^i - x_m^i| < \varepsilon$

$\sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i^n - y_i| =$ $\qquad$ ולכן $|x_n^i - x_m^i|<\varepsilon \Rightarrow \forall i:\ |x_n^i - y^i|<\varepsilon$

$\Leftarrow \sup_i |x_n^i - y^i| < \varepsilon$

(7) $\max|\cdot| \le |f(0)| + \max|f'(t)| \le M \underbrace{\int_0^1 |f(t)|\,dt}_{Y}$

span$\{t,t^2\}$ נורמה ב- $X=\{1,t,t^2\}$ נורמה ב-

והוכחנו ב' שני נורמה

במרחב סופי נורמות שקולות

$$X \simeq R^n, \quad Y \simeq R^n \Rightarrow X \simeq Y$$

איזומורפים קיימת העתקה M X ל Y כך ש

$$0<M\le \frac{\|x\|_X}{\|Ax\|_Y} \le M$$

(8) $\varphi(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3$ $\quad (1<p<\infty) \quad X = l_p^{(3)}$

$= \langle 1,-2,3, x\rangle$ $\quad$ כל פונקציונל ב $(l_p)^* \sim l_q$

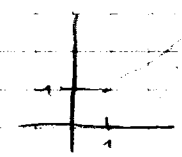
(א) $\|(1,-2,3)\|_q = \sqrt[q]{1^q+2^q+3^q}$

(ב) $\|\varphi\| = \sup_{\|x\|=1} x(\tfrac12) - x(\tfrac13) = 2$ $\quad$ נבדה למקסם את הפונקציונל

בוחר $\tfrac12 = 1$ וב $\tfrac13$ שווה -1

כל חסום (ג) $\|\varphi\| = \sup_{\|x\|\le 1,\ x\in C[0,1]} x(2)$ $\quad$ כל חסום

$\|x\|\le 1 \Rightarrow \{x : |x(t)|<1,\ 0<t\le 1\}$



חסום (ד) $\|\varphi\| = 1$ $\quad \{x, |x(t)|\le 1\}_{0\le t\le 2}$ $\quad$ נבחר פונקציה שממקסמת את הארוך $X=$

כמו ב 160 א'

(ה) $\frac12|x-2|$ $\quad$ לינארית $\quad$ כל חסום

(10) $\varphi(x_1)=\varphi(x_2) \Rightarrow \varphi(x_1-x_2)=0$, לכל מרחב לינארי ונורמי יש בסיס

נבחר φ פונקציונל הולך ← ההולך תמיד שווה 0 $\Leftrightarrow x_1-x_2=0$

$\Leftarrow x_1=x_2$

(9)

$A \subset X$ צפוף $\quad$ לכל $x\in E$ קיימת $\{x_n\}\subseteq A$ כך ש $\varphi(x_n)\to\varphi(x)$ [מגדיר]

$$\Leftarrow \sup_n \frac{|\varphi(x_n)|}{\|x_n\|} = \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|}$$

$$\Rightarrow \sup_{0\ne x\in A} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} = \sup_{0\ne x\in X} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|}$$

הגשה

(15) $(Af)(s) = \int_{-1}^{1} k(t,s) f(t)\,dt \quad , k(t,s) = t(1-s^2)$ $\quad C_1[-1,1] \ / C[-1,1]$

$= \int_{-1}^{1} t(1-s^2) f(t)\,dt = (1-s^2)\int_{-1}^{1} t f(t)\,dt$ עבור $C[0,1]$

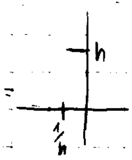
נקבל את * מקסימלי

עבור $s=0$; $f(t) = \underset{\text{פונקציה}}{\mathrm{sign}(t)}\cdot t$

$\Rightarrow \|\cdot\| = 1$

$\int_{-1}^{1} (1-s^2) \int_{-1}^{1} t f(t)\,dt\,ds = s - \frac{s^3}{3}\Big|_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} t f(t)\,dt$ עבור $C_1[-1,1]$

$= \frac{4}{3}\int_{-1}^{1} t f(t)\,dt$

נבחר $f_n(t) =$ 

$= \frac{4}{3}\int_{1-\frac{1}{n}}^{1} t n\,dt = \frac{4n}{3}\cdot\frac{1}{n} \to \frac{4}{3}$

$\sup_{\|f\|=1} \int |t f(t)| \le \int |t|\,|f(t)|\,dt \le \int 1\cdot|f(t)| = 1$ בנוסף

$\Rightarrow \sup \int (1-s^2)\int t f(t) \le \frac{4}{3}$

$\Leftarrow$ זהו הערך המקסימלי והנורמה שלו

(23) סגור = מימד של התמונה

A אופרטור במרחב הילברט

א. הוכיחו A בעל דרגה סופית $\Leftrightarrow$ A^* בעל דרגה סופית

נניח $\dim \mathrm{im}(A^*) < \infty$ בשלילה $\dim \mathrm{Im}(A) = \infty$ אזי קיימת קבוצה $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ בת"ל אינ'.

נגדיר $A^* x_i := y_i$ ונניח ש $\{y_i\}$ בת"ל $\Leftarrow$ סתירה.

$0 = \sum \alpha_i y_i = \sum \bar{\alpha}_i \langle z, y_i\rangle = \sum \bar{\alpha}_i \langle z, A^* x_i\rangle$

$= \sum_i \bar{\alpha}_i \langle Az, x_i\rangle = \sum_i \bar{\alpha}_i \langle x_j, x_i\rangle = \bar{\alpha}_j \neq 0 \Rightarrow$ סתירה

$\{y_i\}$ סופית. הוכחנו שכל מעבר לעיל עם הזמן שלו עמ"א

ב. הוכיחו כי A קומפקטי $\Leftrightarrow$ A^* קומפקטי

$\|A - A_\epsilon\| < \epsilon \quad , \quad \|A^* - A_\epsilon^*\| = \|(A-A_\epsilon)^*\| \overset{\|A\| = \|A^*\|}{=} \|A - A_\epsilon\| < \epsilon$

בס"ד

(20) ב. $(Af)(s) = \int_0^s f(t)\,dt$ $\quad L_2[0,1]$

כל איבר ניתן להציג כ $f = \sum c_k e^{iks}$

$$\Rightarrow A\left(\sum c_k e^{iks}\right) = \sum \beta_k c_k e^{iks}$$

$$\Rightarrow A\left(\sum c_k e^{ist}\right) = \int_0^s \sum c_k e^{ikt}\,dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{c_k e^{its}}{its} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{c_k}{ik}$$

(21) • AB — A קומפקטי וחסום, B חסום

A קומפקטי ← קיימת סדרה של אופרטורים סופיים A_n כך ש $A_n \to A$

ונראה ש $\|(A_n - A)B\| \le \underbrace{\|A_n - A\|}_{\to 0}\,\underbrace{\|B\|}_{\text{חסום}}$ $\Leftarrow$ $\|A_nB - AB\| \to 0$

A_nB ממימד סופי כי $\mathrm{Im}\,A_n(B(x)) \subseteq \mathrm{Im}\,A$

⊙ AB קומפקטי

• BA — שאיפה אותו הדבר, נשאר להוכיח ש BA_n ממימד סופי

$\mathrm{Im}(A_n) \subseteq X_0$ כאשר X_0 ממימד סופי (מהגדרת אופרטור סופי)

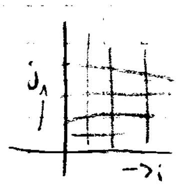
$B(\mathrm{Im}\,A_n) \subseteq B(X_0)$

$\dim \mathrm{Im}(B|_{X_0}) \le \dim X_0$ כי $\dim(\mathrm{Im}\,B|_{X_0}) + \dim(\ker B|_{X_0}) = \dim X_0$

(22) $\|I\| = \|A^{-1}A\| \le \|A^{-1}\|\,\|A\| \Rightarrow \|A\|^{-1} \le \|A^{-1}\|$

<u>תרגיל:</u> יהא X בנך ממימד אינסופי. אזי כדור היחידה הסגור אינו פרה קומפקטי.

(24) ① $\|J\| \le \int |K(s,t)|$ (נורמת אופרטור אינטגרלי) ② אם ניתן להציג $K(s,t) = \sum \alpha_i(s)\beta_i(t)$ אזי K ממימד סופי



נחלק את ההמחשה של K ל i, j

כל ריבוע נחזו נקודה ממוצעת שונה

ניקח את האינטגרל של הריבוע ונבנה בעזרתו חדש $\tilde K$

שמגדיר אופרטור אינטגרלי סופי כי $\int|\tilde K_n| \le \|\tilde J\|$.

אז $\tilde K$ ניתן להציג כ: $\tilde K(s,t) = \alpha_{ij}\, 1_{I_i} \cdot 1_{J_j}$

וכן אופרטור מקרב כי $\|J - \tilde J\| \le \int |K - \tilde K|$

ברור שגמור כי אין משמעות לגמור בממשיים

26 (א)

• A אופרטור אינטגרלי קומפקטי. (הרצאה)

• עבור A עם גרעין $K(s,t)$ אזי ל A^* הגרעין = $\overline{K(t,s)}$:

• הגרעין של "$-A$" = $-K(s,t)$ נציב בהגדרת K ונקבל $-A=A^*$

• הוכחנו $A^*=-A$ נעזר בו ונקבל $(-i)A^*=iA \Leftarrow (iA)^*=iA$

עכשיו נפעיל משפט הילברט ש' האופרטור iA (נמצא בסיס א"נ נעזר בו ונקבל!)

כי - הבסיס הוא ו"ע של A:

באופרטור צ"ע ע"ע $\in \mathbb{R}$ $\Leftarrow$ הע"ע של iA הם $-i\lambda$ $\left[(Ai)v=\lambda v \Downarrow Av=i\lambda v\right]$

(ב) $Af(s)=-\lambda f \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} K(s,t)f(t)dt = \lambda f$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{s} -f(t)dt + \int_{s}^{\pi} f(t)dt = \lambda f(s)$$

נגזור לפי s

$$-f(s)-f(s) = -2f(s) = \lambda f'(s)$$

נקבל את המד"ר $f'(s)+\frac{2}{\lambda}f(s)=0 \Rightarrow f(s)=c_1 e^{-\frac{2}{\lambda}t}$

נחפש תנאי שפה:

$$\left\{\begin{array}{l} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \lambda f(-\pi) \\ \int_{-\pi}^{\pi} -f(\pi)dt = \lambda f(\pi) \end{array}\right. \Rightarrow f(\pi)=-f(-\pi)$$

$$c_1 e^{-\frac{2}{\lambda}\pi} = -c_1 e^{+\frac{2}{\lambda}\pi} \Rightarrow c_1\left(e^{-\frac{2}{\lambda}\pi}+e^{\frac{2}{\lambda}\pi}\right)=0$$

$$\Rightarrow 0 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda i}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda i}\right)=0 \qquad \left[\cos\alpha = \frac{e^{\alpha i}+e^{-\alpha i}}{2}\right]$$

$$\frac{2\pi}{\lambda i} = \frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow \lambda_k = \frac{2\pi}{i\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}$$

ע"פ משפט אם יש אופרטור קומפקטי אזי הספקטרום והוא ע"ע + 0