תורת הקבוצות־ תרגיל בית 3

פתרון

1. הוכיחו: α טבעי $\iff$ $s(\alpha)$ טבעי.

פתרון: $\Longleftarrow$:נניח α טבעי. יהי $\beta \le s(\alpha)$. אזי $\beta \le \alpha$ או $\beta = s(\alpha)$. אם $\beta = s(\alpha)$ אז β עוקב. אם $\beta \le \alpha$ אז בגלל שα טבעי β הוא או 0 או עוקב.

$\Longrightarrow$: נניח $s(\alpha)$ טבעי. יהי $\beta \le \alpha$, בפרט $\beta < s(\alpha)$. בגלל ש$s(\alpha)$ טבעי, βהוא או 0 או עוקב.

2. נגדיר את ω להיות קבוצת כל הסודרים הטבעיים.

א. הוכיחו ש ω סודר.

ב. הוכיחו שω הוא הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו $\emptyset$.

פתרון:

א. ω הוא קבוצה של סודרים. צריך להוכיח שהיא $\in$ –טרנזיטיבית. שקול להגיד: כל איבר של סודר טבעי הוא סודר טבעי. ובכן, יהי α סודר טבעי ו$\beta < \alpha$. צריך להוכיח שβטבעי. יהי $\gamma \le \beta$. אז $\gamma < \alpha$, ולכן γ הוא או 0 או עוקב. $\Longleftarrow \beta$ טבעי.

ב. ראשית, נוכיח שω גבולי. לצורך כך, מספיק להוכיח שאם $\alpha \in \omega$ אז גם $s(\alpha) \in \omega$. כלומר, אם αטבעי אז גם $s(\alpha)$ טבעי. זה בדיוק מה שהוכחנו בשאלה 1.

כעת, נוכיח שאם $\omega > \alpha \neq 0$ אז α עוקב.

אם $\omega > \alpha \neq 0$ אז $0 \neq \alpha \in \omega$. כלומר, $\alpha \neq 0$ טבעי. מהגדרה זה אומר שα עוקב.

3. יהיו A, B איזומורפיות סדר. הוכיחו שהאיזו' סדר בניהן הוא יחיד.

פתרון: נניח בשלילה שיש $f, g : A \to B$ אז $g^{-1} \circ f : A \to A$ היא איזו' סדר מA לעצמה. הוכחנו בתרגול שזה חייב להיות העתקת השהות. $g^{-1} \circ f = id \Longleftarrow g = f$.

4. תהי A קבוצה סדורה היטב, ו $B \subseteq A$. הוכיחו: $type(B) \le type(A)$.

נסמן $type(A) = \alpha$ ו$type(B) = \beta$. נניח בשלילה ש$\alpha < \beta$. נסמן $f : A \to \alpha, g : B \to \beta$ איזו' סדר. נסתכל על $f \circ g : \beta \to \beta$. $f \circ g$ היא פו' שומרת סדר, אבל מתקיים ש $f \circ g(\alpha) < \alpha$. סתירה.

5. הוכיחו את "קש"ב לסודרים": יהיו A ו B סדורות היטב, ונניח שיש $f : A \to B$ שומרת סדר, ו$g : B \to A$ שומרת סדר, אז יש $h : A \to B$ איזומורפיזם סדר. (רמז: השתמשו בתרגיל הקודם)

פתרון: פו' שומרות סדר הן חח"ע, לכן $A \cong f(A) \subseteq B$ ו$B \cong g(B) \subseteq A$. מהתרגיל הקודם נקבל ש $type(A) \le type(B)$ ו $type(B) \le type(A)$. בסודרים ידוע שזה גורר $type(A) = type(B)$.