תרגיל 3

(1) א) * נבדוק האם $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = e^{-kx}$
מקיימים את המשוואה:

$$(*) \quad y'' = k^2 \cdot y$$

$$y_1' = k \cdot e^{kx}$$

$$y_1'' = k^2 \cdot e^{kx} = k^2 \cdot y_1 \Rightarrow$$ y_1 מקיים את המשוואה $(*)$

$$y_2' = -k \cdot e^{-kx}$$

$$y_2'' = k^2 \cdot e^{-kx} = k^2 \cdot y_2 \Rightarrow$$ y_2 מקיים את המשוואה $(*)$

נבדוק האם y_1, y_2 הם בת"ל

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{kx} & e^{-kx} \\ ke^{kx} & -ke^{-kx} \end{vmatrix} = -k - k = -2k \neq 0$$
$(k>0)$

$\Leftarrow$ y_1, y_2 הם בת"ל וניתן לכתוב את הפתרון הכללי של $(*)$ כך:
$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 = \underline{\underline{C_1 e^{kx} + C_2 \cdot e^{-kx}}}$$

* נמצא פתרון (פ"ת) y_3 אשר מקיים את ת"ה:

$$\begin{cases} y_3(0) = 1 \\ y_3'(0) = 0 \end{cases}$$

$$y_3 = C_1 \cdot e^{kx} + C_2 \cdot e^{-kx}$$

$$y_3' = k \cdot C_1 e^{kx} - k \cdot C_2 \cdot e^{-kx}$$

$$y_3(0) = C_1 + C_2 = 1$$
$$y_3'(0) = kC_1 - kC_2 = 0 \quad \Rightarrow C_1 = C_2 = 1/2$$

$$\boxed{y_3 = \frac{1}{2}\left(e^{kx} + e^{-kx}\right)}$$

* נמצא פתרון כנ"ל y_4 שמקיים ת"ה:

$$\begin{cases} y_4(0) = 0 \\ y_4'(0) = 1 \end{cases}$$

$$y_4 = C_1 \cdot e^{kx} + C_2 \cdot e^{-kx}$$

$$y_4' = kC_1 \cdot e^{kx} - kC_2 \cdot e^{-kx}$$

$$y_4(0) = C_1 + C_2 = 0$$
$$y_4'(0) = k(C_1 - C_2) = 1 \quad \Rightarrow 2C_1 = \frac{1}{k} \Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{2k}, \quad C_2 = -\frac{1}{2k}$$

$$\boxed{y_4 = \frac{1}{2k}\left(e^{kx} - e^{-kx}\right)}$$

2

* נבדוק האם $y_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$, $y_2 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ מקיימים את המשוואה:

$$(*) \quad y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0$$

$$y_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = \underline{x^{-1/2} \cdot \cos x}$$

$$y_1' = \left(x^{-1/2} \cdot \cos x\right)' = \underline{\underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2} \cdot \cos x - x^{-1/2} \cdot \sin x}}$$

$$y_1'' = \left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\cdot\cos x - x^{-1/2}\cdot\sin x\right)' =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^{-3/2}\cdot\cos x\right)' - \left(x^{-1/2}\cdot\sin x\right)' =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}x^{-5/2}\cdot\cos x - x^{-3/2}\cdot\sin x\right) -$$

$$-\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\cdot\sin x + x^{-1/2}\cos x\right) =$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{4}x^{-5/2}\cdot\cos x + x^{-3/2}\cdot\sin x - x^{-1/2}\cos x}}$$

* נציב ב- (*) ונקבל:

$$\frac{3}{4}x^{-5/2}\cdot\cos x + \cancel{x^{-3/2}\sin x} - \cancel{x^{-1/2}\cos x} -$$

$$-\frac{1}{2}x^{-5/2}\cos x - \cancel{x^{-3/2}\sin x} + \cancel{x^{-1/2}\cos x} -$$

$$-\frac{1}{4}x^{-5/2}\cos x = 0$$

קיבלנו פסוק אמת $\Leftarrow$ $y_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ פתרון ל- (*)

$$y_2 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \underline{x^{-1/2}\cdot\sin x}$$

$$y_2' = \left(x^{-1/2}\sin x\right)' = \underline{\underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}\cdot\sin x + x^{-1/2}\cdot\cos x}}$$

$$y_2'' = \left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\sin x + x^{-1/2}\cos x\right)' =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^{-3/2}\cdot\sin x\right)' + \left(x^{-1/2}\cdot\cos x\right)' =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}x^{-5/2}\cdot\sin x + x^{-3/2}\cdot\cos x\right) +$$

$$+\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\cdot\cos x - x^{-1/2}\cdot\sin x\right) =$$

$$\underline{\frac{3}{4}x^{-5/2}\cdot\sin x - x^{-1/2}\sin x - x^{-3/2}\cdot\cos x}$$

* נציב ב- (*) ונקבל:

$$\frac{3}{4}x^{-5/2}\sin x-\cancel{x^{-1/2}\sin x}-\cancel{x^{-3/2}\cos x}-$$
$$-\frac{1}{2}x^{-5/2}\sin x+\cancel{x^{-3/2}\cos x}+\cancel{x^{-1/2}\sin x}-$$
$$-\frac{1}{4}x^{-5/2}\cdot\sin x=0$$

קיבלנו פסוק אמת $\Leftarrow$ $y_2=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ מקיים את (*)

* נבדוק האם y_1,y_2 הינם בת"ל:

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} x^{-1/2}\cdot\cos x & x^{-1/2}\cdot\sin x \\ -\frac{1}{2}x^{-3/2}\cdot\cos x-x^{-1/2}\cdot\sin x & -\frac{1}{2}x^{-3/2}\sin x+x^{-1/2}\cos x \end{vmatrix}=$$

$$=-\cancel{\frac{1}{2}x^{-2}\sin x\cos x}+x^{-1}\cos^2 x+$$
$$+\cancel{\frac{1}{2}x^{-2}\sin x\cos x}+x^{-1}\sin^2 x=$$
$$=\frac{1}{x}(\cos^2 x+\sin^2 x)=\frac{1}{x}\neq 0$$

$\Leftarrow$ y_1,y_2 – בת"ל.

הפתרון הכללי של (*) הוא לכן:

$$\boxed{y=C_1\cdot\frac{\cos x}{\sqrt{x}}+C_2\cdot\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}$$

* נמצא פתרון פ-ה y_3 שמקיים את ת"ה:

$$y_3\left(\frac{\pi}{4}\right)=y_3'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

(5)

$$y_3 = C_1 \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2 \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

$$y_3' = C_1 \cdot \left(-\frac{\cos x}{2\sqrt{x^3}} - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right) + C_2 \cdot \left(-\frac{\sin x}{2\sqrt{x^3}} + \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \right)$$

$$y_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = C_1 \cdot \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{\pi}/2} + C_2 \cdot \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{\pi}/2} = 1$$

$$y_3'\left(\frac{\pi}{4}\right) = C_1 \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}/2}{\sqrt{\pi^3}/4} - \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{\pi}/2} \right) + C_2 \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}/2}{\sqrt{\pi^3}/4} + \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{\pi}/2} \right)$$

$$= \left(-2\sqrt{\frac{2}{\pi^3}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \cdot C_1 + \left(-2\sqrt{\frac{2}{\pi^3}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) C_2 =$$

$$= 1$$

$$C_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - C_2 \Leftarrow \quad C_1 + C_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \; *$$

$$\left(-2\sqrt{\frac{2}{\pi^3}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - C_2 \right) - \quad \Leftarrow$$

$$-2\sqrt{\frac{2}{\pi^3}}\, C_2 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, C_2 = 1$$

$$-\frac{2}{\pi} + \cancel{2 C_2 \sqrt{\frac{2}{\pi^3}}} - \frac{1}{\pi} + C_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \cancel{2 C_2 \sqrt{\frac{2}{\pi^3}}} +$$

$$+ C_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 1$$

$$2 C_2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 1 + \frac{3}{\pi} = \frac{\pi + 3}{\pi}$$

$$\boxed{C_2 = \left(\frac{\pi + 3}{2\pi} \right) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

$$C_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{\pi + 3}{2\pi} \right) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\left(\frac{\pi - 3}{2\pi} \right) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

(6)

$$\boxed{y_3 = \left(\frac{\pi-3}{2\pi}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \left(\frac{\pi+3}{2\pi}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}$$

---

(2) (א)

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1\cdot y_2' - y_1'\cdot y_2 = 0$$

* נתון כי $y_1 \neq 0$ בכל הקטע ולכן אפשר לחלק:

$$\frac{y_1\cdot y_2' - y_1'\cdot y_2}{y_1^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0 \Rightarrow$$

$$= \frac{y_2}{y_1} = C\,(\text{קבוע}) \Rightarrow \underline{y_1,y_2 \text{ הם ת"ל}}$$

(ב)

$$W(e^{a_1x},e^{a_2x}) = \begin{vmatrix} e^{a_1x} & e^{a_2x} \\ a_1e^{a_1x} & a_2e^{a_2x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(a_1+a_2)x}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}}_{\text{דטרמיננטה ואן-דר-מונד סדר 2}} = \boxed{e^{(a_1+a_2)x}\cdot(a_2-a_1)}$$

$$W(e^{a_1x},e^{a_2x},e^{a_3x}) = \begin{vmatrix} e^{a_1x} & e^{a_2x} & e^{a_3x} \\ a_1e^{a_1x} & a_2e^{a_2x} & a_3e^{a_3x} \\ a_1^2e^{a_1x} & a_2^2e^{a_2x} & a_3^2e^{a_3x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(a_1+a_2+a_3)x} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}}_{\text{דטרמיננטה של ואן-דר-מונד מסדר 3}} =$$

$$= e^{(a_1+a_2+a_3)x} \cdot \left[\left(a_2 a_3^2 - a_3 \cdot a_2^2\right) - \left(a_1 a_3^2 - a_3 a_1^2\right) + \right.$$

$$\left. + \left(a_1 a_2^2 - a_2 a_1^2\right) \right] = e^{(a_1+a_2+a_3)x} \cdot \left[a_2 a_3^2 - a_3 a_2^2 - \right.$$

$$\left. - a_1 a_3^2 + a_3 a_1^2 + a_1 a_2^2 - a_2 a_1^2 \right] = e^{(a_1+a_2+a_3)x} \cdot$$

$$\cdot \left[a_2 a_3^2 - a_3 a_2^2 - a_1 a_3^2 + a_3 a_1^2 + a_1 a_2^2 - a_2 a_1^2 + \underline{\underline{a_1 a_2 a_3}} - \right.$$

$$\left. - \underline{\underline{a_1 a_2 a_3}} \right] = e^{(a_1+a_2+a_3)x} \cdot \left[a_3 \left(a_2 a_3 - a_1 a_3 + a_1^2 - \right. \right.$$

$$\left. \left. - a_1 a_2 \right) - a_2 \left(a_2 a_3 - a_1 a_3 + a_1^2 - a_1 a_2 \right) \right] =$$

$$= e^{(a_1+a_2+a_3)x} \cdot \left[(a_3 - a_2)\left(a_2 a_3 - a_1 a_3 + a_1^2 - a_1 a_2\right) \right] =$$

$$= e^{(a_1+a_2+a_3)x} \cdot \left[(a_3 - a_2)\left(a_3(a_2 - a_1) - a_1(a_2 - a_1)\right) \right] =$$

$$= \boxed{e^{(a_1+a_2+a_3)x} \cdot \left[(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)(a_2 - 1) \right]}$$

* עבור $W(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \ldots, e^{a_k x})$ נקבל:

(8)

$$= \begin{vmatrix} e^{a_1 x} & e^{a_2 x} & \cdots & e^{a_n x} \\ a_1 e^{a_1 x} & \cdots & & a_n e^{a_n x} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n-1} e^{a_1 x} & \cdots & & a_n^{n-1} e^{a_n x} \end{vmatrix} = e^{(a_1+a_2+\dots+a_n)x} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \cdots & & a_n^{n-1} \end{vmatrix}}_{} = e^{(a_1+a_2+\dots+a_n)x} \cdot$$

* דטרמיננטה של ון-דר-מונד
מסדר n

$$\cdot \left[(a_n-a_{n-1})(a_n-a_{n-2}) \cdots (a_n-a_1) \cdots (a_{n-1}-a_{n-2}) \cdots (a_{n-1}-a_1) \cdot \right.$$
$$\left. \cdots (a_2-a_1) \right] = e^{(a_1+a_2+\dots+a_n)x} \cdot \prod_{1 \le i \le j \le n} (a_j - a_i).$$

(ב)

$$y_1 = x^\alpha, \quad y_1' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad y_1'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \quad y_1''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

* נציב את זה למשוואה ונקבל:

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot x^\alpha + \alpha(\alpha-1)\cdot a_1 x^\alpha + \alpha \cdot a_2 x^\alpha + a_3 x^\alpha = 0$$

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + \alpha(\alpha-1)\cdot a_1 + \alpha a_2 + a_3 = 0 \quad \Leftarrow \quad \underline{\underline{x^\alpha \neq 0}}$$

$$\alpha(\alpha-1)\cdot a_1 + \alpha \cdot a_2 + a_3 = -\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$$

* מהמשוואה האחרונה קל לראות כי עבור:

$$\boxed{\begin{aligned} a_1 &= (\alpha-2) \\ a_2 &= (\alpha-1)(\alpha-2) \\ a_3 &= -3\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \end{aligned}}$$

הצלחה — ושת"ק.

לכן ניתן לרשום:

$$\begin{pmatrix} -\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) & \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) & \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \\ -\beta\cdot(\beta-1)(\beta-2) & \beta(\beta-1)(\beta-2) & \beta(\beta-1)(\beta-2) \\ -\gamma\cdot(\gamma-1)(\gamma-2) & \gamma(\gamma-1)(\gamma-2) & \gamma(\gamma-1)(\gamma-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^\alpha \\ x^\beta \\ x^\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

על מנת ש- $x^\gamma, x^\beta, x^\alpha$ יהיו בת"ל אסור שיהיה תלות בין 2 שלהם כלשהן של הגזירה הנ"ל

$\Leftarrow$ צ"ל ש: $\underline{\alpha\neq\beta\neq\gamma}$.

---

(3)

1) $(*)\quad y''+xy'=3x\ ,\ 1$

* נתון לנו פתרון אחד של המשוואה ההומוגנית ונחפש את הפתרון של המשוואה הלא הומוגנית בצורה: $y=y_1\cdot\int z\,dx$

$y=\int z\,dx$

$y'=z$

$y''=z'$

* נציב ב- $(*)$ ונקבל:

$z'+xz=3x$

* קיבלנו משוואה לינארית מסדר 1 ב-z

* הומוגנית-

$z'+xz=0$

$$\frac{dz}{dx} = -xz$$

$$\int \frac{dz}{z} = -\int x\,dx + C \Rightarrow \ln|z| = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$z = C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

* לא הומוגני:

$$\left(C(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' + x\cdot C(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 3x$$

$$C'(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cancel{- x\cdot C(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}} \cancel{+ xC(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}} = 3x$$

$$C'(x) = 3\cdot x\cdot e^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow C(x) = 3\int x\cdot e^{\frac{x^2}{2}}\,dx + C =$$

$$= 3\int d\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right) = 3\cdot e^{\frac{x^2}{2}} + C_1$$

* לכן הפתרון של (**) הוא:

$$z = C(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(3\cdot e^{\frac{x^2}{2}} + C_1\right)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \underline{\underline{3 + C_1\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}}$$

* והפתרון הכללי של (*) הוא:

$$y = \int z\,dx = \int \left(3 + C_1\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx + C_2 =$$

$$= \underbrace{C_1\int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + C_2}_{\text{פתרון כללי של ההומוגני}} + \underbrace{3x}_{\text{פתרון פרטי של הלא-הומוגני}}$$

(11)

$(*)\quad xy''-(x+2)y'+2y=x^3+x \quad , e^x$ (2

$y=e^x\cdot\int z\,dx$

$y'=e^x\int z\,dx+e^x z$

$y''=e^x\int z\,dx+e^x z+e^x z+e^x z'=$

$=e^x\int z\,dx+2e^x z+e^x z'$

* נציב ב-(*) ונקבל:

$xe^x\int z\,dx+2xe^x z+xe^x z'-(x+2)(e^x\int z\,dx+e^x z)+$

$+2e^x\int z\,dx=x^3+x$

$\cancel{xe^x\int z\,dx}+2xe^x z+xe^x z'-\cancel{xe^x\int z\,dx}-xe^x z-$

$-\cancel{2e^x\int z\,dx}-2e^x z+\cancel{2e^x\int z\,dx}=x^3+x$

$xe^x\cdot z'+xe^x z-2e^x z=x^3+x$

$(**)\quad z'+\left(1-\frac{2}{x}\right)z=e^{-x}\cdot(x^2+1)$

* קיבלנו מד"ר לינארית מסדר 1 ב-z:

* הומוגני: $\quad z'+\left(1-\frac{2}{x}\right)z=0$

$\int\frac{dz}{z}=-\int\left(1-\frac{2}{x}\right)dx+C$

$\ln|z|=-x+2\ln|x|+C$

$\underline{\underline{z=C\cdot x^2\cdot e^{-x}}}$

* לפי המשוואה:

$$(C(x)\cdot x^2 e^{-x})' + \left(1-\frac{2}{x}\right)C(x)\cdot x^2 e^{-x} = e^{-x}(x^2+1)$$

$$C'(x)\cdot x^2\cdot e^{-x} + \cancel{2x\cdot C(x)\cdot e^{-x}} - \cancel{C(x)\cdot x^2\cdot e^{-x}} + \cancel{C(x)\cdot x^2\cdot e^{-x}} -$$

$$- \cancel{2x\cdot C(x)\cdot e^{-x}} = e^{-x}(x^2+1)$$

$$C'(x) = 1+\frac{1}{x^2} \Rightarrow \underline{C(x) = x - \frac{1}{x} + C_1}$$

* לכן, הפתרון הכללי של (**) הוא:

$$z = C(x)\cdot x^2\cdot e^{-x} = \left(x - \frac{1}{x} + C_1\right)\cdot x^2\cdot e^{-x} =$$

$$= (x^3 + C_1x^2 - x)\cdot e^{-x}$$

$$\int z\,dx = \int (x^3 + C_1x^2 - x)e^{-x}dx =$$

$$= -\left[(x^3+C_1x^2-x)\cdot e^{-x} - \int (3x^2+2C_1x-1)e^{-x}dx\right] =$$

$$= -\left[(x^3+C_1x^2-x)\cdot e^{-x} + (3x^2+2C_1x-1)\cdot e^{-x} -\right.$$

$$\left.- \int (6x+2C_1)\cdot e^{-x}dx\right] = -\left[(x^3+C_1x^2-x)\cdot e^{-x} +\right.$$

$$\left. + (3x^2+2C_1x-1)\cdot e^{-x} + (6x+2C_1)\cdot e^{-x} + 6\cdot e^{-x}\right] + C_2$$

* לכן, הפתרון הכללי של (*) הוא:

$$y = e^x\int z\,dx = -x^3 - C_1x^2 + x - 3x^2 - 2C_1x + 1 - 6x -$$

$$- 2C_1 - 6 + C_2\cdot e^x =$$

$$= \boxed{C_1\cdot(-x^2-2x-2) + C_2\cdot e^x - x^3 - 3x^2 - 5x - 5}$$

פתרון כללי של ההומוגנית
פתרון פרטי של הלא הומוגנית

(3

$(*)\quad xy'' + (x+2)y' + y = e^{-x}\ ,\ \frac{1}{x}$

$$y = \frac{1}{x}\int z\,dx$$

$$y' = -\frac{1}{x^2}\int z\,dx + \frac{1}{x}\cdot z$$

$$y'' = \frac{2}{x^3}\int z\,dx - \frac{1}{x^2}z - \frac{1}{x^2}z + \frac{1}{x}z' =$$

$$= \frac{2}{x^3}\int z\,dx - \frac{2}{x^2}z + \frac{1}{x}z'$$

* נציב ב- (*) ונקבל:

$$\frac{2}{x^2}\int z\,dx - \frac{2}{x}z + z' + (x+2)\left(-\frac{1}{x^2}\int z\,dx + \frac{1}{x}z\right) +$$

$$+ \frac{1}{x}\int z\,dx = e^{-x}$$

$$\cancel{\frac{2}{x^2}\int z\,dx} - \cancel{\frac{2}{x}z} + z' - \cancel{\frac{1}{x}\int z\,dx} + z - \cancel{\frac{2}{x^2}\int z\,dx}$$

$$+ \cancel{\frac{2}{x}z} + \cancel{\frac{1}{x}\int z\,dx} = e^{-x}$$

$(**)\quad z' + z = e^{-x}$

* הומוגני:

$$z' + z = 0$$

$$z' = -z$$

$$\int \frac{dz}{z} = -\int dx + C \Rightarrow \ln|z| = -x + C \Rightarrow$$

$$\underline{z = C\cdot e^{-x}}$$

* לא הומוגני –

$$(C(x)\cdot e^{-x})' + C(x)\cdot e^{-x} = e^{-x}$$

$$C'(x)e^{-x} - \cancel{C(x)e^{-x}} + \cancel{C(x)e^{-x}} = e^{-x}$$

$$C'(x) = 1 \Rightarrow C(x) = x + C_1$$

* הפתרון הכללי של (**) הוא:

$$z = C(x)\cdot e^{-x} = (x+C_1)\cdot e^{-x} = x\cdot e^{-x} + C_1\cdot e^{-x}$$

* לכן, הפתרון הכללי של (*) הוא:

$$y = \frac{1}{x}\int z\,dx = \frac{1}{x}\int (xe^{-x} + C_1\cdot e^{-x})\,dx =$$

$$= \frac{1}{x}\left(\left(-xe^{-x} - \int e^{-x}dx - C_1e^{-x}\right) + C_2\right) =$$

$$= \frac{1}{x}\left(\left(-xe^{-x} + e^{-x} - C_1e^{-x}\right) + C_2\right) =$$

$$= \boxed{\underbrace{C_1\cdot\frac{-e^{-x}}{x} + C_2\cdot\frac{1}{x}}_{\text{פתרון כללי של הומוגני}} + \underbrace{\left(\frac{1}{x}-1\right)\cdot e^{-x}}_{\text{פתרון פרטי של לא הומוגני}}}$$

---

4)

$$(*)\quad xy'' + (x-1)y' - y = 0 \quad , \; e^{-x}$$

$$y = e^{-x}\int z\,dx$$

$$y' = -e^{-x}\int z\,dx + e^{-x}\cdot z$$

$$y'' = e^{-x}\int z\,dx - 2e^{-x}z + e^{-x}z'$$

* נציב ב- (*) ונקבל:

$$xe^{-x}\int z\,dx - 2xe^{-x}z + xe^{-x}z' + (x-1)(-e^{-x}\int z\,dx + e^{-x}z)$$
$$- e^{-x}\int z\,dx = 0$$

$$\cancel{xe^{-x}\int z\,dx} - 2xe^{-x}z + xe^{-x}z' - \cancel{xe^{-x}\int z\,dx} + xe^{-x}z$$
$$+ \cancel{e^{-x}\int z\,dx} - e^{-x}z - \cancel{e^{-x}\int z\,dx} = 0$$

$$xe^{-x}z' - xe^{-x}z - e^{-x}z = 0$$

$$z' - \left(1 + \frac{1}{x}\right)z = 0$$

$$z' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)z$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx + C_1$$

$$\ln|z| = x + \ln|x| + C_1 \Rightarrow z = \underline{\underline{C_1 \cdot x \cdot e^{x}}}$$

* לכן, הפתרון הכללי של (*) הוא:

$$y = e^{-x}\cdot\int z\,dx = e^{-x}\int C_1 \cdot x \cdot e^{x}\,dx =$$
$$= C_1 e^{-x}\left[x \cdot e^{x} - \int e^{x}\,dx\right] = C_1 \cdot e^{-x}\left[x \cdot e^{x} - e^{x}\right.$$
$$\left. + C_2\right] = \boxed{C_1 \cdot (x-1) + C_2 \cdot e^{-x}}$$

(5

$$(*)\quad (1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad , x$$

$$\Downarrow$$

* ננרמל את המשוואה ונשתמש הפסק בנוסח—
ליוביל-אוסטרוגרדסקי כדי למצוא פתרון שני
של המשוואה ההומוגנית:—

$$(*)\quad y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{2}{1-x^2}y = 0$$

$$\boxed{y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2}\,dx}$$

$$y_2 = x \cdot \int \frac{e^{\int \frac{2x}{1-x^2}dx}}{x^2}\,dx =$$

$$\left| \int \frac{2x}{1-x^2}dx = -\int \frac{d(1-x^2)}{(1-x^2)}dx = -\ln|1-x^2| \right|$$

$$= x \cdot \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} = \left| \frac{\overset{(1-x)(1+x)}{A}}{x^2} + \frac{\overset{x^2(1+x)}{B}}{1-x} + \frac{\overset{x^2(1-x)}{C}}{1+x} = \frac{1}{x^2(1-x)(1+x)} \right.$$

$$x=1 \Rightarrow 2B=1 \Rightarrow B=1/2$$

$$x=-1 \Rightarrow 2C=1 \Rightarrow C=1/2$$

$$\left. x=0 \Rightarrow A=1 \right|$$

$$= x \cdot \int\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}\right)dx = x\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln|1-x^2|\right)$$

$$= \underbrace{\boxed{-1 + \frac{1}{2}\ln|1-x^2|}}_{y_2}$$

$\Leftarrow$ הפתרון הכללי של $(*)$ הוא:

(17)

$$\boxed{y = C_1 \cdot x + C_2 \cdot \left(-1 + \frac{1}{2} \ln|1-x^2|\right)}$$