

## מבוא לסטטיסטיקה והסתברות

### תרגיל מספר 7

#### להגשה בתרגול בעוד שבועיים לידי המתרגל בלבד

#### שאלה 1:

תהי  $\Omega \neq \emptyset$ . יהי  $E \neq \emptyset$  אוסף כלשהו של תת-קבוצות ב- $\Omega$ . יהי  $B$  אוסף כל הסיגמה-אלגבראות של  $\Omega$  המכילות את  $E$ .

- יהי  $\mathbb{A}_\Omega$  אוסף כל תת-הקבוצות של  $\Omega$ . הוכיחו כי  $\mathbb{A}_\Omega$  סיגמה-אלגברה. הסיקו כי  $B \neq \emptyset$ .
- נגדיר  $\mathbb{A}_E = \bigcap_{A \in B} A$ . הוכיחו כי  $\mathbb{A}_E$  היא סיגמה-אלגברה.
- הוכיחו כי  $\mathbb{A}_E$  היא הסיגמה-אלגברה המינימלית המכילה את  $E$ .

#### שאלה 2:

- תהי  $\mathbb{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$  סיגמה-אלגברה על  $X$ . תהי  $Y \subseteq X$  תת-קבוצה. קבעו האם  $\{A \in \mathbb{A} : A \subseteq Y\}$  ו- $\{A \cap Y : A \in \mathbb{A}\}$  הן אלגבראות סיגמה. כיצד תשתנה תשובתכם אם נתון בנוסף ש  $Y \in \mathbb{A}$ .
- יהי  $(\Omega, \mathbb{A}, P)$  מרחב הסתברות. ותהי  $B \in \mathbb{A}$  כך ש  $P(B) > 0$ . נגדיר  $(B, \mathbb{A}_B, P_B)$  באופן הבא:  $\mathbb{A}_B = \{A \cap B \mid A \in \mathbb{A}\}$  ולכל קבוצה  $C \in \mathbb{A}_B$  נגדיר  $P_B(C) = P(C)/P(B)$ . הוכיחו כי  $(B, \mathbb{A}_B, P_B)$  מרחב הסתברות.

#### שאלה 3:

$X$  משתנה מקרי בעל פונקציית הצפיפות:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ c & 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- מצאו את  $c$ .
- רשמו את פונקציית ההצטברות.
- חשבו את  $P(\frac{1}{3} < X < \frac{3}{4})$ .
- חשבו התוחלת של  $X$ .

#### שאלה 4:

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \cos(x) & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

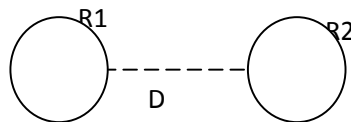
המיימ  $X$  הוא בעל פונקציה הצפיפות:

א. מצאו את  $c$ .

ב. מצאו את פונקציה ההתפלגות של  $X$ .

#### שאלה 5:

לפניכם זוג מעגלים שרדיוסיהם  $R_1 \sim U(0, R)$  ו-  $R_2 \sim U(0, R)$  הם משתנים מקריים בלתי תלויים (רציפים כמובן) בעלי התפלגות אחידה. יהי  $D$  המרחק בין הכדורים. מצאו את ההסתברות לכך שאחד המעגלים מקיף את משנהו.



#### שאלה 6:

רכבת מגיע לתחנה כל 15 דקות החל מהשעה שש בבוקר. אדם מגיע לתחנה כל בוקר בין השעה שבע ועשרה לשבע וחצי. יהי  $X$  מספר הדקות משבע ועשרה עד ללהגעת האדם לתחנה. ויהי  $Y$  מספר הדקות שהאדם נדרש לחכות לרכבת. חשבו את פונקציות ההצטברות והצפיפות של  $Y$  בהינתן אלו של  $X$ .