ועדת המשמעת מזהירה!
נבחן שימצאו ברשותו חומרי
עזר אסורים או יתפס בהעתקה
יענש בחומרה עד כדי הרחקתו
מהאוניברסיטה.

סמסטר ב', מועד א', תשע"ג
תאריך הבחינה: 18.7.2013
מספר קורס: 01 – 833 – 88

בחינה בקורס אנליזה מודרנית 2

המרצה: ד"ר ניר לב

משך הבחינה: 3 שעות.
אין להשתמש בחומר עזר.
משקל כל שאלה 22 נקודות.

1. במרחב $C[0,1]$ האם קבוצת הפונקציות הגזירות ברציפות המקיימות

$$\int_0^1 f(t)dt = 0, \quad \int_0^1 |f'(t)|^2 dt \le 100$$

היא פרה־קומפקטית?

$f' \in L^2$

$\|f'\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2}$

2. האם מערכת הווקטורים

$$(2,1,0,0,\dots), \quad (0,2,1,0,0,\dots), \quad (0,0,2,1,0,0,\dots), \quad \dots$$

במרחב ℓ_2 היא שלמה?

3. יש לחקור התכנסות (חלשה, בנורמה) של סידרת הפונקציונלים הבאה ב־ ℓ_2 :

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\, x_k, \qquad x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

אין נורמה

4. מצאו את נקודות הספקטרום של האופרטור

$$(Af)(t) = \lambda(t) f(t), \quad \lambda(t) = \max\{t, \tfrac{1}{2}\}$$

במרחב $L^2[-1,1]$ וסווגו אותן (ערכים עצמיים, ספקטרום רציף).

$[\frac{1}{2}, 1]$

5. חשבו את הנורמה והספקטרום של האופרטור האינטגרלי

$$(Jf)(s) = \int_0^1 (s+t) f(t)dt$$

במרחב $L^2[0,1]$.

$\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}$

בהצלחה !

$$|f(t)-f(s)| = \left|\int_s^t f'(\theta)\right| \underset{\text{קושי שוורץ}}{\le} \left(\int_s^t 1^2\,du\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_s^t |f'|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{t-s}\cdot\sqrt{100}$$

ארצלה אסקולי
רציפה במ״ש

המרצה: ד"ר ניר לב
סמסטר ב' תשע"ג

תרגילי חזרה בקורס אנליזה מודרנית 2

1. הראו כי המרחבים X, Y הבאים הם איזומטריים, ומצאו העתקה היוצרת איזומטריה ביניהם.

(א) $X = l_\infty^{(2)}$, ו־ Y הוא תת־המרחב הבא של $C[0,1]$

$$Y = \{x(t) = at + b \;:\; a, b \in \mathbb{R}\}$$

(אוסף כל הפונקציות הלינאריות).

(ב) $X = l_2^{(2)}$, ו־ Y הוא תת־המרחב הבא של $C_2[-\pi, \pi]$

$$Y = \{x(t) = a\,\sin(t) + b\,\cos(t) \;:\; a, b \in \mathbb{R}\}$$

(ג) $X = C[0,1]$, ו־ $Y = C[2,5]$.

2. במרחב $C[0,1]$ מצאו את הסגור של

$$E = \{x \in C[0,1] \;:\; x(0) = x'(0) = 0 \text{ ו־ } t = 0 \text{ גזירה בנק' } x\}$$

3. יהי X מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות בקטע $[0,1]$ (כלומר בעלות נגזרת רציפה בקטע), עם הנורמה

$$\|x\| = |x(0)| + \max_{t\in[0,1]} |x'(t)|$$

(א) בדקו כי זו אכן נורמה על X.

(ב) הראו כי X מרחב שלם וספרבילי.

4. האם המרחבים l_p $(1 \le p \le \infty,\ p \ne 2)$ ו־ l_2 איזומטריים? האם המרחבים $C[0,1]$ ו־ l_2 איזומטריים?

5. ב־ l_2 יהי $E = \{x \in l_2 \;:\; x(2j-1) = x(2j)\ \forall j \ge 1\}$.

(א) הוכיחו כי E תת־מרחב סגור.

(ב) מצאו את $E^\perp$.

(ג) לכל $x \in l_2$ מצאו $y \in E$ ו־ $z \in E^\perp$ כך ש־ $x = y + z$.

6. הראו כי כדור היחידה הסגור איננו קבוצה קומפקטית

(א) במרחב $C[0,1]$.

(ב) במרחב $L_1[0,1]$.

7. הוכיחו כי קיים מספר $M > 0$ כך שלכל פולינום $p(t) = at^2 + bt + c$ מתקיים

$$\max_{-10\le t\le 10} |p'(t)| \le M \int_0^1 |p(t)|\,dt$$

8. נתון מרחב X ופונקציונל לינארי φ. יש לקבוע האם φ חסום, ואם כן למצוא את $\|\varphi\|$.

(א) $X = l_p^{(3)}$ $(1 < p < \infty)$ ו־ $\varphi(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3$.

$\|\varphi\| = 2$

(ב) $X = C[0,1]$ ו־ $\varphi(x) = x(\frac{1}{2}) - x(\frac{1}{3})$.

(ג) X הוא אוסף כל הפולינומים, כתת־מרחב של $C[0,1]$ ו־ $\varphi(x) = x(2)$.

(ד) X הוא אוסף כל הפולינומים, כתת־מרחב של $C[0,2]$ ו־ $\varphi(x) = x(2)$.

(ה) X הוא אוסף כל הפולינומים, כתת־מרחב של $C[0,2]$ ו־ $\varphi(x) = x'(2)$.

9. הוכיחו כי מספיק לחשב נורמה של פונקציונל לינארי חסום על קבוצה צפופה, כלומר אם X מרחב לינארי נורמי, $A \subset X$ צפופה ו־ φ פונקציונל לינארי חסום על X, אזי

$$\|\varphi\| = \sup_{0 \neq x \in A} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|}$$

10. יהי X מרחב לינארי נורמי, ויהיו $x_1, x_2 \in X$. הוכיחו כי אם $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ לכל $\varphi \in X^*$, אזי $x_1 = x_2$.

11. יהיו X מרחב לינארי נורמי, $\{y_n\} \subset X$. הוכיחו כי $\{y_n\}$ מערכת שלמה אם ורק אם

$$\varphi \in X^*, \quad \varphi(x_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 0$$

(כלומר הפונקציונל הלינארי החסום היחיד המאפס את כל איברי המערכת הוא פונקציונל האפס).

12. חקרו התכנסות חלשה והתכנסות בנורמה של סדרות הפונקציונלים הבאות:

(א) ב־ $C[-1,1]$, $\varphi_n(x) = \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} x(t)dt$.

(ב) ב־ $C[0,1]$, $\varphi_n(x) = \int_{1/n}^{1} \frac{x(t)}{\sqrt{t}} dt$.

(ג) ב־ l_p $(1 \leq p < \infty)$, $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}(x(1) + x(2) + \cdots + x(n))$.

(ד) ב־ $L_2[0,2\pi]$, $\varphi_n(x) = \int_0^{2\pi} x(t)e^{-int}dt$.

13. חשבו את הנורמה של הפונקציונלים הבאים:

(א) ב־ $C[0,2\pi]$ וב־ $C_2[0,2\pi]$, $\varphi(x) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 10t}{\sqrt{t}} x(t)dt$.

(ב) ב־ $C[0,1]$, $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x(\frac{1}{k})}{k^2}$.

14. קבעו האם המערכת הנתונה היא מערכת שלמה.

(א) המערכת $\{1, t^2, t^4, t^6, \dots\}$ ב־ $C[0,1]$? ב־ $C[-1,1]$?

(ב) המערכת

$$(1,1,0,0,\dots), \quad (0,1,1,0,0,\dots), \quad (0,0,1,1,0,0,\dots), \quad \dots$$

ב־ l_2? ב־ l_1?

(ג) המערכת $\{\cos(nt)\}_{n=1}^{\infty}$ ב־ $L_2[0,\pi]$.

15. במרחבים $C[-1,1]$ ו־ $C_1[-1,1]$, חשבו את נורמת האופרטור

$$(Af)(s) = \int_{-1}^{1} K(t,s)f(t)dt, \qquad K(t,s) = t(1-s^2)$$

$f = \sum a_k t^{2k}$

t^2

t^3

$t = \sum a_k t^k = \sum a_{2k-1} t^{2k-1} + \sum a_{2k} t^{2k}$

16. חשבו את הנורמה של האופרטורים הלינאריים הבאים: $\sup \frac{2j-1}{j+1}$

(א) ב- l_2, $(Ax)(j) = \frac{2j-1}{j+1}x(j)$. $\|A\| = 2$

(ב) ב- $L_2[0,1]$, $(Af)(t) = \varphi(t)f(t)$ כאשר $1\frac{1}{2}$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 3t, & 0 \le t < \frac{1}{2} \\ 2, & t = \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < t \le 1 \end{cases}$$

(ג) ב- $C[0,1]$, $(Af)(s) = \int_0^s f(t)dt$. 1 $f \equiv 1$

17. חקרו התכנסות נקודתית והתכנסות בנורמה של סדרות האופרטורים הבאות:

(א) ב- l_2, $(A_nx)(j) = \frac{n}{n+j}x(j)$. $A_n \xrightarrow{w} I$ $\|A_n - I\| \ge \frac{1}{2}$

(ב) ב- $C[0,1]$, כאשר A_nf היא פונקציה רציפה המזדהה עם f בנקודות $t = \frac{k}{n}$ עבור $0 \le k \le n$, ולינארית בכל אחד מהקטעים $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ עבור $1 \le k \le n$. $A_n \xrightarrow{w} I$ $\|A_n - I\| \to 0$

18. ב- $C[0,1]$ או $L_2[0,1]$ נתונה המשוואה

$$\int_0^s (s-t)f(t)dt = f(s) - 1$$

(א) הוכיחו כי עבור האופרטור המתאים A מתקיים

$$(A^nf)(s) = \int_0^s \frac{(s-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}f(t)dt \qquad (n \ge 1)$$

והראו כי $\|A^n\| \le \frac{1}{(2n-1)!}$.

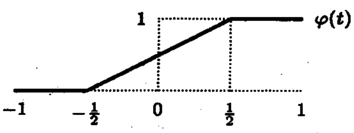
(ב) הסיקו כי למשוואה קיים פתרון יחיד, ורשמו את הפתרון כטור אינסופי. $f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{2k}}{(2k)!}$

19. עבור כל אחד מהאופרטורים הנתונים יש למצוא ספקטרום, ערכים עצמיים וקטורים עצמיים מתאימים.

$\lambda = \pm 1$ $v_k = e_{2k} \pm e_{2k+1}$

(א) ב- l_2, $Ax = (x_2, x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, \dots)$.

(ב) ב- $C[-1,1]$ או $L_2[-1,1]$, $(Af)(t) = \varphi(t)f(t)$ כאשר $\varphi(t)$ כבציור



Sp $[0,1]$

20. מצאו ומיינו את נקודות הספקטרום של האופרטורים הבאים:

(א) ב- $L_2[0,\frac{\pi}{2}]$ או $C[0,\frac{\pi}{2}]$, $(Af)(s) = \int_0^{\pi/2} \cos(s-t)f(t)dt$.

(ב) ב- $L_2[0,1]$, $(Af)(s) = \int_0^s f(t)dt$.

21. יהיו A, B אופרטורים חסומים, A קומפקטי. הראו כי גם AB, BA קומפקטיים.

22. יהי X מרחב בנך, A אופרטור הפיך. הראו כי $\|A^{-1}\| \ge \|A\|^{-1}$. האם יש שיוויון ?

$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \le \|A\|\|A^{-1}\|$

$\dim A = \infty$ $\dim A^* < \infty$

23. יהי A אופרטור במרחב הילברט.

(א) הוכיחו כי A בעל דרגה סופית אם ורק אם A^* בעל דרגה סופית.

(ב) הוכיחו כי A קומפקטי אם ורק אם A^* קומפקטי.

24. ב־ $L^2[0,1]$ נתון אופרטור אינטגרלי

$$(Af)(s) = \int_0^1 K(s,t)f(t)dt$$

כאשר

$$K(s,t) = \min\{s,t\} = \begin{cases} t, & t \le s \\ s, & t \ge s \end{cases}$$

(א) הראו כי A קומפקטי וצמוד לעצמו.

(ב) מצאו בסיס אורתונורמלי של פונקציות עצמיות, וחשבו את הערכים העצמיים, את הספקטרום ואת הנורמה של A.

$n \in \mathbb{N}$ $\lambda_n = \left(\frac{\pi}{\frac{\pi}{2} + \pi n}\right)^2$

$f_n(s) = c_2 \sin \frac{s}{\pi}$

25. ב־ $L^2[0,1]$ נתון אופרטור אינטגרלי

$$(Af)(s) = \int_0^1 K(s,t)f(t)dt$$

כאשר

$$K(s,t) = \begin{cases} s(t+1), & t \le s \\ t(s+1), & t \ge s \end{cases}$$

$\lambda_n = -\frac{1}{(\pi n)^2}$

(א) הראו כי A קומפקטי וצמוד לעצמו.

(ב) הראו כי המשוואה $Af = \lambda f$ עבור $\lambda \neq 0$ שקולה לבעיה

$f_n = c_1 \cos(n\pi s) + \frac{c_1}{\pi n} \sin(n\pi s)$

$$\begin{cases} \lambda f''(s) = f(s) \\ f(0) = f'(0) \\ f(1) = f'(1) \end{cases}$$

(ג) מצאו בסיס אורתונורמלי של פונקציות עצמיות, וחשבו את הערכים העצמיים, את הספקטרום ואת הנורמה של A.

26. ב־ $L^2[-\pi,\pi]$ נתון אופרטור אינטגרלי

$$(Af)(s) = \int_{-\pi}^{\pi} K(s,t)f(t)dt$$

כאשר

$$K(s,t) = \begin{cases} -1, & t < s \\ 1, & t > s \end{cases}$$

(א) הראו כי A קומפקטי ו־ $A^* = -A$. הסיקו כי קיים בסיס אורתונורמלי של פונקציות עצמיות וכי הערכים העצמיים הם מספרים מדומים טהורים (כלומר $\Re(\lambda) = 0$ לכל ערך עצמי λ).

(ב) מצאו בסיס אורתונורמלי של פונקציות עצמיות וחשבו את הערכים העצמיים, את הספקטרום ואת הנורמה של A.